ΤΑΞΗ: 3η ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 8 Απριλίου 2017
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. **1.** Αθροιστική συχνότητα N_i, είναι η συχνότητα που εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i.

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=c$. Έχουμε: $f(x+h)-f(x)=c-c=0$ και για $h\neq 0$, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$. Επομένως: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$.

Α2. **1.** Σωστό.
2. Λάθος.
3. Λάθος.
4. Σωστό.
5. Λάθος.

Α3. **1.** Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\nu}=\ell^{\nu}$

2. $\left(f(x)\cdot g(x)\right)'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

3. $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

4. Σε μια κανονική κατανομή, στο διάστημα $(\bar{x}-2s,\ \bar{x}+2s)$ βρίσκεται το 95% των παρατηρήσεων.

ΘΕΜΑ Β

Κλάσεις	x_i (κέντρο κλάσης)	v_i	N_i	f_i	F_i	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i(x_i - \bar{x})^2$
[0,20)	10	1	1	0,05	**0,05**	10	–40	1600	1600
[20,40)	30	**8**	**9**	0,40	0,45	240	–20	400	3200
[40,60)	50	**4**	13	**0,20**	0,65	200	0	0	0
[60,80)	70	4	17	0,20	**0,85**	280	20	400	1600
[80,100)	90	3	20	0,15	1,00	270	40	1600	4800
Σύνολα	------	20	------	1,00	-----	1000	-------	-------	11200

Β1. $f_3 = \frac{v_3}{v} \Leftrightarrow v = \frac{v_3}{f_3} = \frac{4}{0,2} = \frac{40}{2} \Leftrightarrow v = 20$.

Β2. $x_1 = \frac{0+20}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Ομοίως και τα υπόλοιπα.

$v_1 = f_1 \cdot v = 0,05 \cdot 20 = 1$

$v_2 = N_2 - N_1 = 9 - 1 = 8$

$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{8}{20} = 0,40$

$f_4 = F_4 - F_3 = 0,85 - 0,65 = 0,20$

$v_5 = N_5 - N_4 = 20 - 17 = 3$

$f_5 = F_5 - F_4 = 1,00 - 0,85 = 0,15$

Β3. $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot v_i}{v} = \frac{1000}{20} = 50$

Β4. $s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{v} = \dfrac{11200}{20} = 560$

$s = \sqrt{s^2} \approx 23,7$

$CV = \dfrac{s}{\bar{x}} = \dfrac{23,7}{50} = 0,474$ ή 47,4%.

Το δείγμα είναι ανομοιογενές γιατί $CV > 10\%$.

Β5. τιμή τουλάχιστον 50: $\dfrac{1}{2}\cdot f_3 + f_4 + f_5 = \dfrac{1}{2}\cdot 0,20 + 0,20 + 0,15 = 0,45$ ή 45%.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Θα πρέπει $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$.

Επίσης, θα πρέπει

$$\sqrt{x+1} - 2 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} \neq 2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \neq 2^2 \Leftrightarrow x+1 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq 3$$

Άρα $A_f = [-1,3) \cup (3,+\infty)$

Γ2. $$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{x+1}-2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 2^2} = \lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x+1-4} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\left(x^2-2x-3\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}$$

Παραγοντοποίηση $x^2-2x-3 = 1\cdot(x-3)\left(x-(-1)\right) = (x-3)(x+1)$

$x^2-2x-3=0$ $\qquad \Delta = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4+12 = 16$

$$x_{1,2} = \frac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3} = (3+1)\left(\sqrt{3+1}+2\right) = 4\cdot 4 = 16$

Γ3. Αφού η f είναι συνεχής στο x=3, θα ισχύει:

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$ **(1)**

$$f(3)=\sigma\upsilon\nu\left(3-3\right)+\eta\mu\left(9-3^2\right)+\alpha^2-1=\sigma\upsilon\nu 0+\eta\mu 0+\alpha^2-1=$$

$$=1+0+\alpha^2-1=\alpha^2$$

(1)=> $\alpha^2=16 \Leftrightarrow \alpha=\pm\sqrt{16} \Leftrightarrow \alpha=\pm 4$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda = f'(-1) = -6$, θα υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης f.

$$f'(x)=\left(-\frac{x^3}{3}\right)'+\left(\frac{\kappa x^2}{2}\right)'-(3)'=-x^2+\kappa x$$

$$\lambda = f'(-1)=-6 \Leftrightarrow -\left(-1\right)^2+\kappa\cdot\left(-1\right)=-6 \Leftrightarrow -1-\kappa=-6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\kappa=-6+1 \Leftrightarrow -\kappa=-5 \Leftrightarrow \kappa=5$$

Δ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο x = –1 θα έχει τη μορφή: $y=\lambda x+\beta$ με $\lambda = f'(-1)=-6$.

$$y=f(-1)=-\frac{\left(-1\right)^3}{3}+\frac{\kappa\left(-1\right)^2}{2}-3=\frac{1}{3}+\frac{5\cdot 1}{2}-3=$$

$$=\frac{\overset{2}{1}}{3}+\frac{\overset{3}{5}}{2}-\frac{\overset{6}{3}}{1}=\frac{2+15-18}{6}=-\frac{1}{6}$$

$$y=-6x+\beta \Leftrightarrow -\frac{1}{6}=-6\cdot\left(-1\right)+\beta \Leftrightarrow -\frac{1}{6}-6=\beta \Leftrightarrow \beta=-\frac{37}{6}$$

Εξίσωση εφαπτομένης: $y=-6x-\dfrac{37}{6}$.

Δ3. Βρίσκουμε τον ρυθμό μεταβολής του κέρδους (παράγωγο): $f'(x)=-x^2+5x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+5x=0 \Leftrightarrow x\left(-x+5\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ -x+5=0 \Leftrightarrow x=5 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	5	$+\infty$
f'(x)	–	+	0	–
f(x)		↗	Τ.Μ.	↘

Θα πρέπει να κατασκευάσει x = 5 καναπέδες το μήνα για να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος.

Δ4. $f'(0) = -0^2 + 5\cdot 0 = 0$

$f'(1) = -1^2 + 5\cdot 1 = -1 + 5 = 4$

$f'(2) = -2^2 + 5\cdot 2 = -4 + 10 = 6$

$f'(4) = -4^2 + 5\cdot 4 = -16 + 20 = 4$

$f'(5) = -5^2 + 5\cdot 5 = -25 + 25 = 0$

$f'(6) = -6^2 + 5\cdot 6 = -36 + 30 = -6$

Δ5. –6, 0, 0, 4, 4, 6

ν = 6 (άρτιος) Μεσαίες: $3^η$ και $4^η$ παρατήρηση, $δ = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Εύρος: $R = x_{max} - x_{min} = 6 - (-6) = 6 + 6 = 12$

$$\bar{x} = \frac{-6+0+0+4+4+6}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} = 1,33...$$