



## ΤΕΕ Β' ΚΥΚΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

### ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1ο

i.  $v=100$

| ΕΤΗ     | $v_i$   | $N_i$ | $f_i$ | $F_i$ | $f_i \cdot 360^\circ$ | ΚΕΝΤΡΟ ΚΛΑΣΕΩΝ<br>$O_i$ | $O_i \cdot v_i$ |
|---------|---------|-------|-------|-------|-----------------------|-------------------------|-----------------|
| [0,5)   | 10      | 10    | 0,1   | 0,1   | $36^\circ$            | 2,5                     | 25              |
| [5,10)  | 15      | 25    | 0,15  | 0,25  | $54^\circ$            | 7,5                     | 112,5           |
| [10,15) | 40      | 65    | 0,4   | 0,65  | $144^\circ$           | 12,5                    | 500             |
| [15,20) | 20      | 85    | 0,2   | 0,85  | $72^\circ$            | 17,5                    | 350             |
| [20,25) | 10      | 95    | 0,1   | 0,95  | $36^\circ$            | 22,5                    | 225             |
| [25,30) | 5       | 100   | 0,05  | 1     | $x^\circ=18^\circ$    | 27,5                    | 137,5           |
| ΣΥΝΟΛΟ  | $v=100$ |       | 1     |       | $360^\circ$           |                         | 1350            |

Άρα  $36+54+144+72+36+x=360 \Leftrightarrow x=18^\circ$  και

$$f_1 = \frac{36}{360} = 0,1 \quad f_2 = \frac{54}{360} = 0,15 \quad f_3 = \frac{144}{360} = 0,4$$

$$f_4 = \frac{72}{360} = 0,2 \quad f_5 = f_1 = 0,1 \quad f_6 = \frac{18}{360} = 0,05$$

$$f_i = \frac{v_i}{v} \Leftrightarrow v_i = f_i \cdot v, \text{ επομένως:}$$

$$v_1 = 0,1 \cdot 100 = 10$$

$$v_2 = 0,15 \cdot 100 = 15$$

$$v_3 = 0,4 \cdot 100 = 40$$

$$v_4 = 0,2 \cdot 100 = 20$$

$$v_5 = 0,1 \cdot 100 = 10$$

$$v_6 = 0,05 \cdot 100 = 5$$

ii. μέση τιμή:  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^6 O_i \cdot v_i}{v} = \frac{1350}{100} = 13,5$  έτη

iii. τουλάχιστον 10 έτη εργάζονται:  $40+20+10+5=75$  υπάλληλοι.

**ΘΕΜΑ 2ο**

$$f(x) = x^2 - 2\ln x, \quad x > 0$$

$$i. f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2x^2 - 2}{x}, \quad x > 0$$

$$ii. f(1) = 1$$

$$f'(1) = 0$$

$$iii. f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 2}{x} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -1$$

|       |           |   |   |           |
|-------|-----------|---|---|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0 | 1 | $+\infty$ |
| f'(x) |           |   | - | +         |
| f(x)  |           |   | E |           |

Παρατηρούμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε  $x > 1$ .

iv. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο  $x = 1$  το  $f(1) = 1$ .

**ΘΕΜΑ 3ο****A.**

$$i. f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ισχύει } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \text{ και } f(-1) = -6, \text{ άρα } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow a \cdot \frac{1}{8} + \beta \cdot \frac{1}{4} + 1 = 0 \Leftrightarrow a + 2\beta + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 2\beta = -8 \quad (1) \text{ και}$$

$$f(-1) = -6 \Leftrightarrow -a + \beta + 1 = -6 \Leftrightarrow a - \beta = 7 \quad (2)$$

Αφαιρώντας την (2) από την (1) έχουμε:  $3\beta = -15 \Leftrightarrow \beta = -5$  και  $a = 2$ .

Συνεπώς  $(a, \beta) = (2, -5)$ .

$$ii. \text{ Επομένως } f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 1 \text{ με } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x^2 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^3 - 5x^2 + 1}{2x^2 + x - 1} \quad (1)$$

Horner 1

|   |    |    |    |               |
|---|----|----|----|---------------|
| 2 | -5 | 0  | 1  | $\frac{1}{2}$ |
| ↓ | 1  | -2 | -1 |               |
| 2 | -4 | -2 | 0  |               |

$$(2x^2 - 4x - 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(2)$$

Horner 2

|   |   |    |               |
|---|---|----|---------------|
| 2 | 1 | -1 | $\frac{1}{2}$ |
| ↓ | 1 | 1  |               |
| 2 | 2 | 0  |               |

$$(2x + 2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(3)$$

$$\begin{aligned} \text{Από (1), (2), (3): } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x^2 - 4x - 2)(x - \frac{1}{2})}{(2x + 2)(x - \frac{1}{2})} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 2}{2x + 2} = \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{4} - 2 - 2}{3} = \frac{\frac{1}{2} - 4}{3} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{8}{2}}{3} = \frac{-\frac{7}{2}}{3} = -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

$$\text{B. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - x + 1}{x^3 - 27}, & -1 \leq x \neq 3 \\ a^2 - 1, & x = 3 \end{cases}$$

i.  $D_f = [-1, +\infty)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - (x-1)}{x^3 - 27} =$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{[\sqrt{x+1} - (x-1)] \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - (x-1)^2}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1 - x^2 + 2x - 1}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 3x}{(x^2 + 3x + 9)(x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x(x-3)}{(x^2 + 3x + 9) \cdot (x-3) \cdot [\sqrt{x+1} + (x-1)]} = \frac{-3}{27 \cdot 4} = \frac{-1}{36} = -\frac{1}{36}$$

iii. Αφού  $f$  συνεχής στο  $x_0=3$  ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$  με  $f(3) = a^2 - 1$ . Άρα  $a^2 - 1 = -\frac{1}{36}$

$$\Leftrightarrow 36a^2 - 36 = -1 \Leftrightarrow 36a^2 - 35 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{35}{36} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6} \text{ ή}$$

$$a = -\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{36}} = -\frac{\sqrt{35}}{6}$$

**ΘΕΜΑ 4ο**

- i. Συνάρτηση εσόδων από την πώληση  $x$  αεροσκαφών:

$$\text{Έστω } f(x) = x \cdot E(x) = 3x^2 + 20x$$

Συνάρτηση κέρδους από την πώληση  $x$  αεροσκαφών:

$$K(x) = -x^2 + 20x - 30$$

Γνωρίζουμε ότι: ΚΕΡΔΟΣ = ΕΣΟΔΑ - ΕΞΟΔΑ, δηλαδή  $K(x) = f(x) - P(x) \Leftrightarrow$

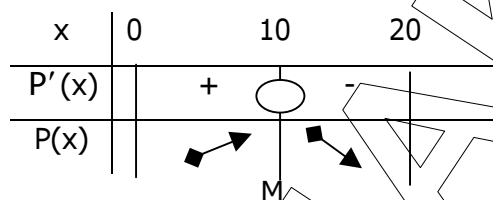
$$\Leftrightarrow P(x) = f(x) - K(x) = 3x^2 + 20x + x^2 - 20x + 30 = 4x^2 + 30, \quad 0 \leq x \leq 20$$

- ii.  $P(5) = 4 \cdot 25 + 30 = 130$  χιλιάδες €

- iii.  $P(6) - P(5) = 174 - 130 = 44$  χιλιάδες €

- iv.  $K'(x) = -2x + 20$  χιλιάδες € / μονάδες προϊόντος

- v.  $K'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 10$



Επομένως το εργοστάσιο πρέπει να κατασκευάζει 10 αεροπλάνα κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος.