

ΤΑΞΗ: 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Τετάρτη 19 Απριλίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87

Α3. 1 (γ) 2 (α)

Α4. (α) Σωστό (β) Λάθος (γ) Λάθος (δ) Λάθος (ε) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

Β1. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι  $f'(2) = -1$ Έχουμε  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + 3x - \frac{1}{3}$  άρα  $f'(x) = x^2 - 2ax + 3$ Οπότε  $f'(2) = -1 \Leftrightarrow 4 - 4a + 3 = -1 \Leftrightarrow -4a = -8 \Leftrightarrow a = 2$ Β2. Η  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - \frac{1}{3}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = x^2 - 4x + 3$  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ή  $x = 3$ Το πρόσημο της  $f'$  και τα αντίστοιχα διαστήματα μονοτονίας της  $f$  είναι στον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$	↗	↘	↗	

Η  $f$  γνησίως αύξουσα στα διαστήματα  $(-\infty, 1]$ ,  $[3, +\infty)$ , γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, 3]$

Στη θέση  $x = 1$  έχει τοπικό μέγιστο το  $f(1) = 1$  και στη θέση  $x = 3$  τοπικό ελάχιστο το  $f(3) = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{B3. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{\sqrt{x+1}-2} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x+1}-2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{\sqrt{x+1}^2 - 2^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-1)(\sqrt{x+1}+2) = 8 \end{aligned}$$

**B4.** Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης  $f'(x) = 3$

$$\text{Επομένως } x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ή} \\ x = 4 \end{cases}$$

Άρα θα βρούμε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα σημεία της  $A(0, f(0))$  και  $B(4, f(4))$

Για το σημείο  $A(0, f(0))$  έχουμε  $f(0) = -\frac{1}{3}$

Έστω  $y = \lambda x + \beta$  η εξίσωση εφαπτομένης με  $\lambda = 3$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A\left(0, -\frac{1}{3}\right)$  οπότε  $-\frac{1}{3} = 3 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{3}$

Άρα είναι η  $y = 3x - \frac{1}{3}$

Για το σημείο  $B(4, f(4))$  έχουμε  $f(4) = 1$

Έστω  $y = \lambda x + \beta$  η εξίσωση εφαπτομένης με  $\lambda = 3$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(4,1)$  οπότε  $1 = 3 \cdot 4 + \beta \Leftrightarrow \beta = -11$

Άρα είναι η  $y = 3x - 11$

### ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων το αριστερό άκρο της 1<sup>ης</sup> κλάσης είναι 5 ενώ το δεξί άκρο της 4<sup>ης</sup> είναι το 29. Αν  $c$  το πλάτος των κλάσεων τότε θα είναι:

1<sup>η</sup> κλάση  $[5, 5+c)$

2<sup>η</sup> κλάση  $[5+c, 5+2c)$

3<sup>η</sup> κλάση  $[5+2c, 5+3c)$

4<sup>η</sup> κλάση  $[5+3c, 5+4c)$

Οπότε:  $5+4c = 29 \Leftrightarrow 4c = 24 \Leftrightarrow c = 6$

Από την υπόθεση είναι  $v_1 = 3$  και  $v_2 = 5$ .

Το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 3<sup>η</sup> κλάση είναι διπλάσιο από το ποσοστό των μαθητών που ανήκουν στην 4<sup>η</sup> κλάση οπότε

$$f_3\% = 2f_4\% \Leftrightarrow f_3 = 2f_4 \Leftrightarrow v_3 = 2v_4$$

Το άθροισμα των εμβαδών των τεσσάρων ορθογωνίων είναι 20 οπότε:  $v = 20$

Επίσης ισχύει:  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 \Leftrightarrow 3 + 5 + 2v_4 + v_4 = 20 \Leftrightarrow 3v_4 = 12 \Leftrightarrow v_4 = 4$

Επομένως  $v_3 = 8$

Γ2. Για τις αθροιστικές σχετικές συχνότητες έχουμε:

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{3}{20} = 0,15 \text{ άρα } f_1\% = 15$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{5}{20} = 0,25 \text{ άρα } f_2\% = 25$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{8}{20} = 0,4 \text{ άρα } f_3\% = 40$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} = \frac{4}{20} = 0,2 \text{ άρα } f_4\% = 20$$

Οπότε ο πίνακας γίνεται:

Κλάσεις	$x_i$	$v_i$	$f_i$	$f_i\%$
[5,11)	8	3	0,15	15
[11,17)	14	5	0,25	25
[17,23)	20	8	0,40	40
[23,29)	26	4	0,20	20
<b>Σύνολο</b>		20	1	100

**Γ3. α)** Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται τουλάχιστον 11 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι  $f_2\% + f_3\% + f_4\% = 25 + 40 + 20 = 85$

**β)** Το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται το πολύ 17 λεπτά για να φτάσουν στο σχολείο είναι  $f_1\% + f_2\% = 15 + 25 = 40$

**Γ4.** Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{3 \cdot 8 + 5 \cdot 14 + 8 \cdot 20 + 4 \cdot 26}{20} = \frac{358}{20} = 17,9$$

**Γ5.** Το 20% των μαθητών που χρειάζονται τον περισσότερο χρόνο για να φτάσουν στο σχολείο ανήκουν στην κλάση [23,29). Το υπόλοιπο 20% θα πρέπει να ανήκει στην κλάση [17,23) στην οποία βρίσκεται το 40%. Επειδή υποθέτουμε ότι οι παρατηρήσεις σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα τότε το υπόλοιπο 20% θα πρέπει να ανήκει στο διάστημα [20,23), οπότε οι μαθητές που χρειάζονται 20 λεπτά και πάνω για να έρθουν στο σχολείο χρησιμοποιούν κάποιο μεταφορικό μέσο.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1. (i)** Αν συμβολίσουμε με  $E(x)$  την συνάρτηση των εσόδων τότε  $E(x) = 50x$

**(ii)** Το κέρδος είναι αν από τα έσοδα αφαιρέσουμε το κόστος ,δηλαδή

$$P(x) = E(x) - K(x) \Leftrightarrow P(x) = -x^2 + 80x - 100$$

**Δ2.**  $P'(x) = -2x + 80, x \geq 0$

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 40$$

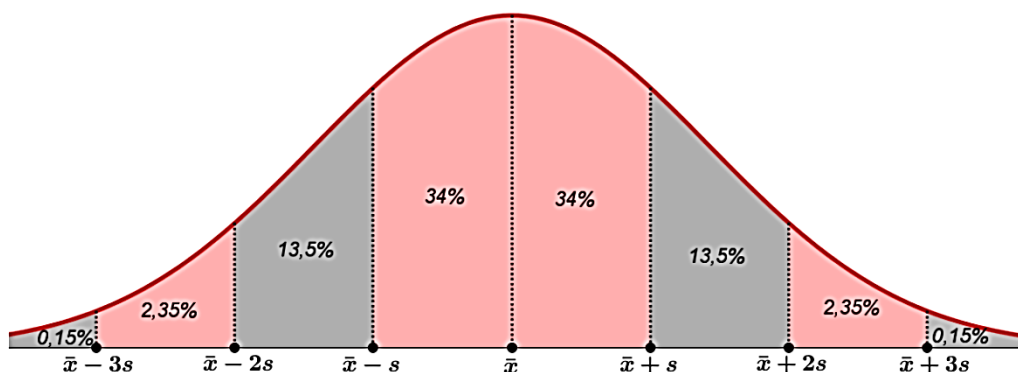
$$P'(x) > 0 \Leftrightarrow -2x + 80 > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 40$$

x	0	40	$+\infty$
$P'(x)$			-
$P(x)$			↘

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι το κέρδος μεγιστοποιείται όταν η εταιρεία παράγει 40 μονάδες του προϊόντος.

**Δ3. (i)** Αφού το 50% των συρταριών έχουν μήκος πάνω από 40cm τότε  $\bar{x} = 40$

Επίσης στην κανονική κατανομή ισχύουν τα παρακάτω



Τα 100 συρτάρια αντιστοιχούν σε  $\frac{100}{4000} 100\% = 2,5\%$

Άρα το 2,5% των προϊόντων έχουν μήκος πάνω από 50 cm

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2023**  
Β' ΦΑΣΗ

Ε\_3.ΜΕΛ3Γ(α)

δηλαδή  $\bar{x} + 2s = 50 \Leftrightarrow s = 5$

(ii)  $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{5}{40} = 0,125$  άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές .

(iii) Το ποσοστό των ελαττωματικών είναι το 0,3% της παραγωγής

Επομένως  $\frac{0,3}{100} \cdot 4000 = 12$  συρτάρια παράγει ελαττωματικά η εταιρεία κάθε μέρα.

ΧΑΝΣΙΑΚΗ