

ΤΑΞΗ: 3<sup>η</sup> ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ.

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

## ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις  $f, g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α στην παράγωγό της στην στήλη Β μεταφέροντας τον πίνακα 1 στο τετράδιό σας σωστά συμπληρωμένο.

Στήλη Α	Στήλη Β
1. $f(x) = \eta\mu^3 x$	Α. $f'(x) = 3\sigma\upsilon\nu 3x$
2. $f(x) = x^{-6}, x \neq 0$	Β. $f'(x) = -3\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu x$
3. $f(x) = \eta\mu 3x$	Γ. $f'(x) = -3\eta\mu 3x$
4. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$	Δ. $f'(x) = -6x^{-7}$
5. $f(x) = \sigma\upsilon\nu 3x$	Ε. $f'(x) = -5x^{-6}$
6. $f(x) = \frac{1}{x^5}, x \neq 0$	ΣΤ. $f'(x) = 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x$

Πίνακας 1					
1.	2.	3.	4.	5.	6.

Μονάδες 9

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Για το πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι :

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

(β) Η παράγωγος μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του  $y = f(x)$  ως προς  $x$  όταν  $x = x_0$

(γ) Ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta_{\mu x} = \eta_{\mu x_0}$

(δ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και ισχύει  $f'(x) < 0$  για κάθε εσωτερικό σημείο του  $\Delta$  τότε η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$

(ε) Αν  $f(x) = 5, x \in \mathbb{R}$  τότε  $f'(5) = 5$

**Μονάδες 5**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 1}, & x \neq 1 \\ a^2 - 2a + 3, & x = 1 \end{cases}$

**B1.** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Μονάδες 5**

**B2. (α)** Να αποδείξετε ότι  $a = 1$ .

**Μονάδες 3**

(β) Να υπολογίσετε όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

**Μονάδες 6**

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρείστε  $f(x) = x^2 - 5x + 6, x \in \mathbb{R}$

**B3.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $A(0, f(0))$

**Μονάδες 5**

**B4.** Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης  $f$  και να συγκρίνεται τους αριθμούς  $f(-2023)$  και  $f(-2022)$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - ax^2 + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}$  και  $a, \beta$  πραγματικοί αριθμοί.

Γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο με τεταγμένη 2 και ισχύει  $f'(1) = -3$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι  $a = 3$  και  $\beta = 2$

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -3x + 1$

**Μονάδες 7**

**Γ3.** Να βρείτε το  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h}$

**Μονάδες 3**

**Γ4.** Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης της  $f$  η εφαπτομένη της έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

**Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 6 - \sqrt{x^2 + 4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

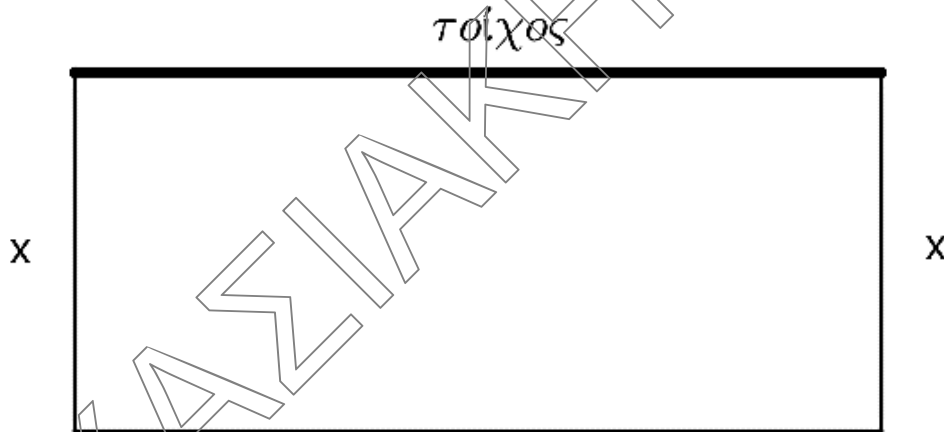
**Δ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 7**

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{f(x) - 4}$

Μονάδες 5

Δ3. Ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου το έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 100 m από τις τρεις πλευρές του, η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Συμβολίζουμε με  $x$  τα μήκη των πλευρών του οικοπέδου όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



(i) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τον τύπο  $E(x) = -2x^2 + 100x, 0 < x < 50$

Μονάδες 6

(ii) Να βρείτε τις διαστάσεις του οικοπέδου όταν το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7