Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα 1ο

Β. 1. Λάθος 2. Σωστό 3. Σωστό
4. Λάθος 5. Λάθος 6. Σωστό

Θέμα 2ο

α) $f'(x) = 2x \cdot e^{-x} - (x^2 + a)e^{-x} = (2x - x^2 - a)e^{-x} = (-x^2 + 2x - a)e^{-x}$

$f(0) = a$ και $f'(0) = -a$

$\varepsilon : y - a = -ax \Leftrightarrow y = -ax + a$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M(0, f(0))$. Ταυτίζεται με την $y = -2x + 2$ όταν $-a = -2$ και $a = 2$ δηλαδή όταν $a = 2$.

β) Για $a = 2$ είναι $f(x) = (x^2 + 2)e^{-x}$ και $f'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \Re$ διότι $-x^2 + 2x - 2 < 0$ και $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \Re$. Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

γ) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left[(x^2 + 2)e^{-x}\right] = +\infty$

διότι $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2) = +\infty$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[(x^2 + 2) \cdot e^{-x}\right] \overset{(+\infty \cdot 0)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2 + 2)'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

δ) Από (β) και (γ) συμπεραίνουμε ότι το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(A) = (0, +\infty)$ το οποίο περιέχει το 2007. Η $f(x) \downarrow$ στο $\Re$, άρα η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Re$.

Θέμα 3ο

α) $|z+w|^2=|z-w|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=0 \overset{(1)}{=} z\cdot\overline{w}+\overline{z\cdot\overline{w}}=0 \Leftrightarrow$

$2\,\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$

β) Ισχύει $z\cdot\overline{w}+\overline{z}\cdot w=0 \Leftrightarrow$ (ερώτημα (α)) $z\cdot\overline{w}=-\overline{z}\cdot w$. Διαιρούμε με

$w\overline{w}=|w|^2$ και έχουμε $\dfrac{z}{w}=-\dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$ που σημαίνει ότι $\dfrac{z}{w}$ φανταστικός.

γ) Αν Α, Β οι εικόνες των z,w τότε $(\mathrm{OA})=|z|,(\mathrm{OB})=|w|$ και

$(\mathrm{AB})=|z-w|$.

Αρκεί ότι $(\mathrm{OA})^2+(\mathrm{OB})^2=(\mathrm{AB})^2 \Leftrightarrow |z|^2+|w|^2=|z-w|^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0$ ισχύει.

β' μέθοδος

Η ισότητα $|z+w|=|z-w|$ γράφεται ισοδύναμα $\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right| \Leftrightarrow$

$\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)^2=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)^2 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ Άρα $A\hat{O}B=90^0$

γ' μέθοδος

Αν Γ η 4η κορυφή του παραλληλόγραμμου με πλευρές ΟΑ και ΟΒ, τότε $(\mathrm{O\Gamma})=|z+w|$ και $(\mathrm{AB})=|z-w|$ επειδή $|z+w|=|z-w|$ είναι $(\mathrm{O\Gamma})=(\mathrm{AB})$. Επομένως ΟΑΓΒ ορθογώνιο.

δ) Είναι

$z\cdot\overline{w}=\left[a+i\cdot f(a)\right]\left[f(\beta)+\beta i\right]=a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)+\left[a\cdot\beta+f(a)f(\beta)\right]i$

οπότε $\mathrm{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)=0 \Leftrightarrow a\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(a)=0 \Leftrightarrow \dfrac{f(a)}{a}=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$.

Θα αποδείξουμε ότι έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a,β) η εξίσωση

$x\cdot f'(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=0$. Εφαρμόζεται το Θ. Rolle για

την $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο $[a,\beta]$, άρα υπάρχει $x_0\in(a,\beta)\ldots$

Θέμα 4ο

α) $g'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ και $g''(x)=\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

x	$-\infty$ **0**	$+\infty$
$g''(x)$	+	-
$g(x)$	$\cup$	$\cap$

Σ. Κ.

β) Για $x=0$ είναι $0\le g(0)\le 0$. Ισχύει η ισότητα

Για κάθε $x>0$ εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. στο $[0,x]$ οπότε υπάρχει

$\xi\in(0,x)$ τέτοιος ώστε $g'(\xi)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\dfrac{g(x)}{x}$ Έχουμε

$\dfrac{1}{1+x^2}\le g'(\xi)\le 1 \Leftrightarrow g'(x)\le g'(\xi)\le g'(0)$. Ισχύει διότι $g'(x)\downarrow$ στο $[0,+\infty)$ και

$0<\xi<x$ (ερώτημα α)

β' μέθοδος

Θα αποδείξουμε ότι:

$$g(x)\ge\frac{x}{1+x^2}\Leftrightarrow\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt\ge\frac{x}{1+x^2}$$

Έστω $h(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt-\frac{x}{1+x^2}$, $x\ge 0$

$$h'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-1+x^2}{(1+x^2)^2}=$$

$=\dfrac{2x^2}{(1+x^2)^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και h συνεχής στο $[0,+\infty)$. Άρα

$h(x)\uparrow$ στο $[0,+\infty)$. Επομένως για κάθε $x\ge 0$ ισχύει $h(x)\ge h(0)=0$.

Όμοια αποδεικνύουμε ότι : $g(x)\le x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

γ) Έστω $h(x)=g(x)+g(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Είναι $h'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$ άρα $h(x)=c$

Για $x=0$ είναι $h(0)=0$. Επομένως $h(x)=0$, για κάθε $x\in\Re$.

β' μέθοδος

Είναι $g(x)+g(-x)=\displaystyle\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt+\int_0^{-x}\frac{1}{1+t^2}dt$.

Στο $g(-x)$ θέτουμε $t=-u$ τότε $dt=-du$

Άκρα ολοκλήρωσης

Για $t = 0, u = 0$ και για $t = 0, u = x$.

Άρα $g(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{1+t^2}dt = -\int_0^{x} \frac{1}{1+u^2}du$

Επομένως …

δ) Αφού $f(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0$ τότε $g(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt > 0$. Άρα

$$E = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 x' \cdot g(x)dx = \left[x \cdot g(x)\right]_0^1 - \int_0^1 x \cdot g'(x)dx =$$

$$= g(1) - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = g(1) - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\ln\left(1+x^2\right)\right)'dx =$$

$$= g(1) - \frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = g(1) - \frac{1}{2}\ln 2 \text{ τ.μ.}$$