



Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα 1^ο

A. α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

β) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

Μονάδες 9

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

1. Αν για μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq \kappa$ όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ για κάθε $x \in A$, τότε το κ είναι η μέγιστη τιμή της f .

2. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο x_0 και είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f(a) \cdot f(\beta) < 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (a, \beta)$, τότε η f δεν είναι συνεχής στο $[a, \beta]$.

4. Αν για δύο συναρτήσεις f, g συνεχείς στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

5. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει παράγουσα στο διάστημα Δ , τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει: $\int \lambda \cdot f(x) dx = \lambda \int f(x) dx$.

6. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[a, \beta]$ και ισχύει

$$f(x) < g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, \beta], \text{ τότε } \int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx.$$

Μονάδες 12

Θέμα 2°

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + a) \cdot e^{-x}$, $x \in \mathfrak{R}$. Αν η ευθεία $y = -2x + 2$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $M(0, f(0))$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι: $a = 2$.

Μονάδες 7

β) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f .

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

Μονάδες 6

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2007$ έχει ακριβώς μια λύση στο \mathfrak{R} .

Μονάδες 6

Θέμα 3°

Δίνονται οι μιγαδικοί z, w με $z \cdot w \neq 0$ για τους οποίους ισχύει:

$$|z + w| = |z - w|.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\operatorname{Re}(z \cdot \overline{w}) = 0$.

Μονάδες 6

β) Ο αριθμός $\frac{z}{w}$ είναι φανταστικός.

Μονάδες 5

γ) Το τρίγωνο με κορυφές τις εικόνες των z, w στο μιγαδικό επίπεδο και την αρχή O των αξόνων, είναι ορθογώνιο στο O .

Μονάδες 7

δ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[a, \beta]$ με $0 < a < \beta$ και $z = a + i \cdot f(a)$, $w = f(\beta) - \beta i$ τότε η εξίσωση $x \cdot f'(x) = f(x)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (a, β) .

Μονάδες 7

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ όπου $t, x \in \mathfrak{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα τη συνάρτηση g .

Μονάδες 4

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{x}{1+x^2} \leq g(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$

Μονάδες 7

γ) Να αποδείξετε ότι: $g(x) + g(-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathfrak{R}$.

Μονάδες 6

- δ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0, x = 1$ είναι $E = g(1) - \frac{1}{2} \ln 2$ τ.μ.

Μονάδες 8

Καλή Επιτυχία στις Γενικές εξετάσεις

Ε. ΠΑΝΣΤΡΙΑΚΗ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ