



08  
επαναληπτικά  
θέματα

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΕΠΙΛΟΓΗΣ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ  
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.1. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 92  
 A.2. Θεωρία από Σχ. Βιβλίο σελ. 149  
 A.3. Απόδειξη από Σχ. Βιβλίο σελ. 28-29  
 B. α → Λάθος  
 β → Σωστό  
 γ → Σωστό  
 δ → Λάθος  
 ε → Λάθος

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- α) Πρέπει  $x+2 \geq 0$  και  $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$   
 $x \geq -2$  και έστω  $\sqrt{x+2}-2=0$   
 τότε  $\sqrt{x+2}=2$   
 $x+2=4$   
 $x=2$   
 Άρα  $\sqrt{x+2}-2 \neq 0$  όταν  $x \neq 2$ .

Οπότε το πεδίο ορισμού της  $f$  είναι το  $[-2, 2) \cup (2, +\infty)$ .

- β) Τα ζητούμενα σημεία είναι αυτά για τα οποία ισχύει  $f(x)=0$ . Άρα:  
 $x^2-4=0$  και  $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$   
 $x^2=4$  και  $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$   
 $x=\pm 2$  και  $x \in [-2, 2) \cup (2, +\infty)$   
 Άρα  $x=-2$ .

Οπότε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον  $x'$  είναι το  $M(-2, 0)$ .

$$\begin{aligned} \gamma) \quad f(x) &= \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2})^2-2^2} = \\ &= \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4} = \frac{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = (x+2)(\sqrt{x+2}+2) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) = (2+2)(\sqrt{4}+2) = 4 \cdot 4 = 16$$

δ) Ο πίνακας γίνεται:

$x_i$	$v_i$	$f_i$	$N_i$	$F_i$
1	4	0,1	4	0,1
2	16	0,4	20	0,5
3	12	0,3	32	0,8
4	8	0,2	40	1
<b>Σύνολο</b>	40	1		

$$f_1 = \frac{v_1}{v} = \frac{4}{40} = 0,1$$

$$N_1 = v_1 = 4$$

$$F_1 = f_1 = 0,1$$

$$f_2 = \frac{v_2}{v} = \frac{16}{40} = 0,4, \quad N_2 = v_1 + v_2 = 4 + 16 = 20$$

$$F_2 = f_1 + f_2 = 0,1 + 0,4 = 0,5$$

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Rightarrow v_4 = f_4 \cdot v = 0,2 \cdot 40 = 8$$

$$N_4 = v = 40 \quad \text{και} \quad F_4 = 1$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 40 \Rightarrow 4 + 16 + v_3 + 8 = 40 \Rightarrow v_3 = 40 - 28 = 12$$

$$f_3 = \frac{v_3}{v} = \frac{12}{40} = 0,3, \quad N_3 = N_2 + v_3 = 20 + 12 = 32$$

$$F_3 = F_2 + f_3 = 0,5 + 0,3 = 0,8$$

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

α) Στον παρακάτω πίνακα «διπλής εισόδου» καταγράφουμε τα δεδομένα μας.

Φύλλο \ Τμήμα	Διοικητικό τμήμα	Τεχνικό τμήμα	Σύνολο
Άνδρες	10	50	60
Γυναίκες	30	10	40
<b>Σύνολο</b>	40	60	100

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{50}{100} = 0,5$$

$B_1$ : «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να είναι άνδρας»

$B_2$ : «είναι το ενδεχόμενο το άτομο να εργάζεται στο διοικητικό τμήμα».

$$\begin{aligned} B &= (B_1 \cup B_2) \Rightarrow P(B) = P(B_1 \cup B_2) = P(B_1) + P(B_2) - P(B_1 \cap B_2) \\ &= \frac{60}{100} + \frac{40}{100} - \frac{10}{100} = \frac{90}{100} = 0,9 \end{aligned}$$

β) Το άθροισμα των ηλικιών όλων των υπαλλήλων θα είναι:

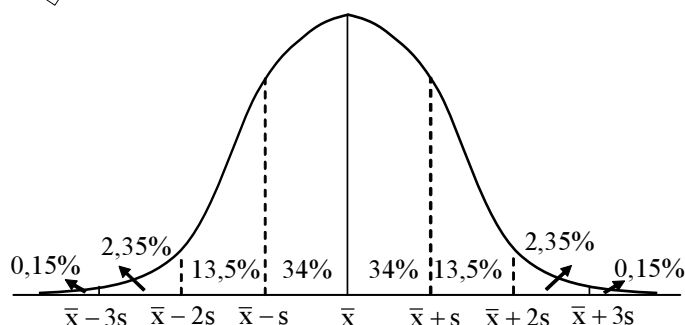
$$\sum_{i=1}^{100} t_i = 60 \cdot 40 + 40 \cdot 40 = 2400 + 1600 = 4000$$

Μετά την πρόσληψη των νεότερων υπαλλήλων το άθροισμα των ηλικιών των υπαλλήλων θα είναι:

$$\bar{y} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v t_i \quad \text{άρα} \quad \sum_{i=1}^v t_i = v \cdot \bar{y} \quad \text{δηλαδή} \quad \sum_{i=1}^{100} t_i = 100 \cdot 39,6 = 3960$$

Έστω  $c$  το πλήθος των ατόμων που αποχώρησαν. Επειδή θα προσληφθούν  $c$  άτομα αλλά κατά 4 χρόνια νεότερα, θα ισχύει ότι:  $4000 - 3960 = 4c$  δηλαδή  $4c = 40$  άρα  $c = 10$

γ) Η καμπύλη συχνοτήτων στην κανονική κατανομή είναι:

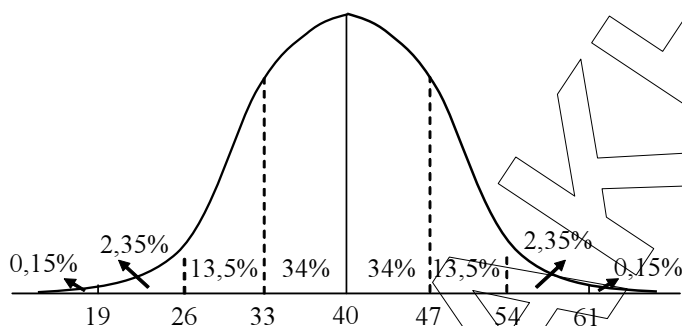


Επειδή το 2,5% (δηλαδή 2,35% + 0,15% = 2,5%) των υπαλλήλων έχει ηλικία το πολύ 26 χρόνια,  $\bar{x} - 2s = 26$  **(1)**

Η μέση ηλικία όλων των υπαλλήλων είναι:  $\bar{x} = \frac{60 \cdot 40 + 40 \cdot 40}{100} = 40$

Από τη σχέση **(1)** έχουμε:  $2s = 14 \Leftrightarrow s = 7$ .

Επομένως η καμπύλη συχνοτήτων θα είναι:



Κάτω από 33 χρόνια θα είναι το 13,5% + 2,35% + 0,15% = 16% των υπαλλήλων της εταιρίας δηλ.  $\frac{16}{100} \cdot 100 = 16$  υπάλληλοι.

δ) Είναι:  $s^2 = \frac{1}{100} \left[ \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100} \right] \Leftrightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i^2}{100} - \frac{\left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100^2} \Leftrightarrow$

$$100^2 s^2 = 100^2 \frac{\sum_{i=1}^k v_i x_i^2}{100} - \frac{\left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2}{100^2} \Leftrightarrow 100^2 s^2 = 100 \cdot \sum_{i=1}^k v_i x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^k v_i x_i \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 10000 s^2 = 250000 \Leftrightarrow S^2 = 25 \Leftrightarrow S = 5$$

Στην κανονική κατανομή το εύρος  $R \approx 6s$ , επομένως  $R \approx 30$ .

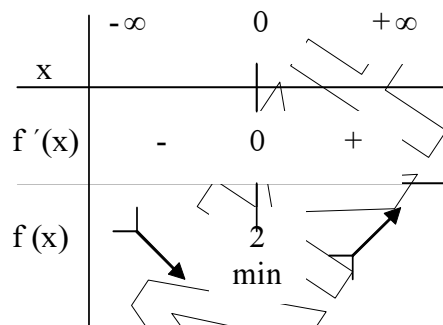
**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

A. Είναι:  $x = \frac{x+5e^x+x+4-7x+1}{5} = \frac{5e^x-5x+5}{5} = e^x-x+1$

Έστω  $f(x) = e^x - x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = e^x - 1$ .

Έχουμε  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$



Για  $x=0$  η  $f$  παρουσιάζει ελάχιστο το  $m = f(0) = 2$

B. Για  $m=2$  είναι:  $g(x) = 2x^2 - \kappa^2 x + 3$ .

Η  $g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $g'(x) = 4x - \kappa^2$ .

Η εφαπτομένη της  $C_g$  στο  $A(1, g(1))$  είναι παράλληλη στον  $x'x$  όταν  $g'(1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - \kappa^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \kappa^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$\kappa = 2$  ή  $\kappa = -2$  (απορρίπτεται αφού  $\kappa \in \Omega$ )

Άρα  $\kappa = 2$ .

$$E = \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$\text{Οπότε } P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{6}{7}$$

Γ. Αφού  $A \subseteq B$  τότε  $A \cap B = A$  και  $P(A \cap B) = P(A)$  οπότε

$$h(x) = \frac{3-2 \cdot P(A)}{12} x^3 + \frac{P(A)}{2} x^2 + x + 2008, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η  $h$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $h'(x) = \frac{3-2 \cdot P(A)}{4} x^2 + P(A) \cdot x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$

και

$$\begin{aligned} \Delta &= P^2(A) - 4 \cdot \frac{3-2 \cdot P(A)}{4} \cdot 1 = P^2(A) - 3 + 2 \cdot P(A) = P^2(A) + 2 \cdot P(A) + 1 - 4 = \\ &= (P(A) + 1)^2 - 4 < 0 \text{ γιατί:} \end{aligned}$$

Το ενδεχόμενο  $A$  αποκλείεται να είναι ο δειγματικός χώρος  $\Omega$  (διότι αν ήταν, θα έπρεπε και  $B = \Omega$ , άτοπο αφού  $A \neq B$ ) άρα  $P(A) \neq 1$  και επειδή  $0 \leq P(A) \leq 1$  έπεται ότι  $0 \leq P(A) < 1$  άρα  $P(A) + 1 < 2$  οπότε  $(P(A) + 1)^2 < 4$ .

(εναλλακτικά: το τριώνομο  $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3$  έχει  $\Delta' = 16$  και ρίζες τις  $-3$  και  $1$  οπότε για  $P(A) \in [0, 1)$  είναι  $P^2(A) + 2 \cdot P(A) - 3 < 0$ ).

Αφού  $\Delta < 0$  η  $h'(x)$  παίρνει τιμές ομόσημες του  $\frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$   
και αφού  $\frac{3 - 2 \cdot P(A)}{4}$  φανερά θετικό, έχω  $h'(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , άρα η  
συνάρτηση  $h$  είναι γνήσια αύξουσα στο  $\mathbb{R}$ .

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ  
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ  
ΙΤΥΤΕΚΕ