

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 5

A2. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

A3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$.

Μονάδες 6

A4. Να βρείτε ποιοι από τους επομένους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

i. Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

Μονάδες 2

ii. $i^{4n+3} = i$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μονάδες 2

iii. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

Μονάδες 2

iv. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση $y = f(x)$, όταν f είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο x_0 είναι η παράγωγος $y = f'(x_0)$.

Μονάδες 2

v. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , τότε τα εσωτερικά σημεία x_0 του Δ , στα οποία $f'(x_0) \neq 0$, δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της f .

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x-2}$ και $g(x) = \ln x + 2$.

B1. Να βρείτε τις συνθέσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

B2. Να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την f^{-1} .

Μονάδες 6

B3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-2} = \ln x + 2$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(e^{-2}, 2)$.

Μονάδες 6

B4. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$(1 + 3\alpha^2) f(x) = e^{\int_x^{2x} 2f(t) dt},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x f^2(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

ii. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^a t f(t) dt$ είναι ανεξάρτητη του a .

Μονάδες 4

Γ3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την f .

Μονάδες 8

Γ4. Αν E είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της f και την ευθεία $x = \alpha$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f(0) = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x+2} = -1 \text{ και } f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(-2) = 1$ και $f(x) \leq x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_0 \in (-2, 0)$.

Μονάδες 6

Δ3. Η εξίσωση

$$f' \left(\int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt \right) = f'(0)$$

έχει μοναδική λύση στο \mathbb{R} την $x = 5$.

Μονάδες 7

Δ4. Ο μιγαδικός αριθμός z για τον οποίο ισχύει

$$f(|z+i|) \leq f(|z|+1)$$

είναι φανταστικός.

Μονάδες 6