

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(α,β)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Να αποδείξετε ότι αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(α, x_0) \cup (x_0, β)$, τότε το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f και η f είναι γνησίως μονότονη στο $(α,β)$

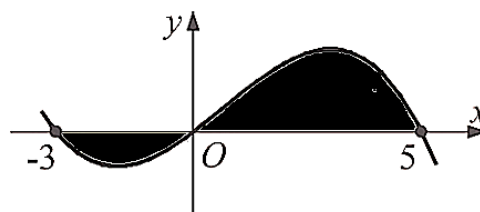
Μονάδες 7

A2. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A3. Στην παρακάτω ερώτηση να επιλέξετε την σωστή απάντηση και να την μεταφέρετε στο τετράδιό σας.

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με :



α) $\int_{-3}^5 f(x)dx$, **β)** $\int_5^{-3} f(x)dx$ **γ)** $\int_{-3}^0 f(x)dx - \int_0^5 f(x)dx$ **δ)** $\int_0^{-3} f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ τότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$

(β) Αν μία συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη τότε δεν είναι και συνεχής.

(γ) Οι συναρτήσεις $f \circ g, g \circ f$ αν ορίζονται τότε δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

(δ) Για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή

“ Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ ”

(ε) Ισχύει ότι : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \frac{1}{x} \right) = 1$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$ και $g(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$

B1. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της g με την h είναι η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}, x \neq 0$$

Μονάδες 5

B2. (i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha > 1$ υπάρχει $\xi \in (1, \alpha)$ ώστε :

$$(f(\alpha) - f(1))(e^{\xi} - 1)^2 = (1 - \alpha)e^{\xi}$$

Μονάδες (6+3)

B3. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}

Μονάδες 7

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \eta\mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x - 3 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Γ1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [1, +\infty)$

Μονάδες 6

Γ3. (i) Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $g(x) = x \ln x$ και $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των C_g, C_h και την ευθεία $x = 2$

Μονάδες 5

Γ4. Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β ισχύει $\ln(\alpha^{2\alpha} \cdot \beta^{2\beta}) + (\alpha - 2)^2 + (\beta - 2)^2 = 2$

Να δείξετε ότι η ευθεία $y = ax + \beta - 5$ είναι ασύμπτωτη της συνάρτησης

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - 2g(x)}{x} \text{ στο } +\infty$$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = e^{x+\kappa} \text{ και } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = -x^2 - x$$

όπου $\kappa \in \mathbb{R}$ και ισχύει ότι : $f(x) - g(x) \geq (\kappa + 2)x + e^\kappa$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 0$

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(0, f(0))$ εφάπτεται και στην C_g

Μονάδες 6

Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει ότι : $-1 < \alpha < \beta < 0$

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\left(\int_a^\beta \frac{f(t)}{g(t)} dt \right) x^3 = (e^x - e)(g(\alpha) - f(\beta))$
έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 7

Δ4. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(f(\alpha)) \cdot \eta\mu x}{xf(x) - x^2 - x}$

Μονάδες 6