



**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό .

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  θα λέμε ότι είναι 1-1 στο  $A$  ;

**Μονάδες 3**

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών .

**Μονάδες 5**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

(α) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και 1-1.

(β) Αν το  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  υπάρχει τότε η  $f$  είναι κατ'ανάγκη παραγωγίσιμη στο  $x_0$

(γ) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων  $f, g$  για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , ισχύει  $f \circ g = g \circ f$ .

(δ) Η συνάρτηση  $f(x) = \sin x$  με  $x \in \mathbb{R}$  έχει μία μόνο θέση ολικού μεγίστου

(ε) Η συνάρτηση  $f(x) = a^x, 0 < a \neq 1$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με παράγωγο  $f'(x) = a^x \ln a$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x} + 1, x \geq 0$  και  $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}, x \neq 2$

**B1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση  $f^{-1}(x) = (x-1)^2, x \geq 1$

**Μονάδες 7**

**B2.** Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f^{-1}$  η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(0, -3)$

**Μονάδες 7**

**B3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g \circ g$  είναι άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων  $f, f^{-1}$ .

**Μονάδες 6**

**B4.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left( g(x) \cdot \eta\mu \left( \frac{1}{2x+1} \right) \right)$

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για τις οποίες ισχύουν:

- $(x-1)f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$  για κάθε  $x \leq 1$
- $g^2(x) = 2xg(x) + 3$  για κάθε  $x \geq 1$
- η  $g$  έχει ελάχιστη τιμή το 3 στη θέση 1

Γ1. (α) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x^3 + x + 1, x \leq 1$

Μονάδες 4

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$  και στην συνέχεια αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (-1, 0)$  ώστε  $f(x_0) = 0$ .

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι  $g(x) = x + \sqrt{x^2 + 3}, x \geq 1$

Μονάδες 6

Γ3. Να λυθεί η εξίσωση  $\eta\mu(f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f\left(\frac{x_0}{2}\right) \right)^{g(x)} + f(x)$

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\frac{f(-x_0)+1}{x} + \frac{f(x+x_0)}{x-1} = 0$  έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$

Μονάδες 5

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = e^{x-1} + 1$ , και

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \begin{cases} \ln x + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h}, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3\kappa, & x \geq 1 \end{cases} \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

Δ1. (α) Να αποδείξετε  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(1) - g(1-h)}{h} = g'(1)$

Μονάδες 2

(β) Να αποδείξετε ότι  $\kappa = 1$  και ότι  $g(x) = \begin{cases} \ln x + 2, & 0 < x < 1 \\ -\frac{1}{x} + 3 & x \geq 1 \end{cases}$

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε την εφαπτομένη της  $C_g$  στο σημείο της  $A(1, g(1))$  και να αποδείξετε ότι εφάπτεται στην  $C_f$ .

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$  ώστε  $g'(x_0) = f(x_0)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $\varphi(x) = f(x) + x$  είναι γνησίως αύξουσα και να δείξετε ότι ισχύει  $e^{g(x)-1} - 2 \geq e - g(x)$  για κάθε  $x \geq 1$

Μονάδες 5