



**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία:** Πέμπτη 7 Ιανουαρίου 2021  
**Διάρκεια Εξέτασης:** 3 ώρες

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f:[0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$  με  $f(x)=\sqrt{x}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0,+\infty)$  με παράγωγο  $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Μονάδες 7**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  θα λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**A3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

$\ll$ Αν το  $\lim_{x\rightarrow x_0} |f(x)|$  υπάρχει τότε πάντα υπάρχει και το  $\lim_{x\rightarrow x_0} f(x)$  $\gg$

**α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A** αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**

**Μονάδες 1**

**β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**

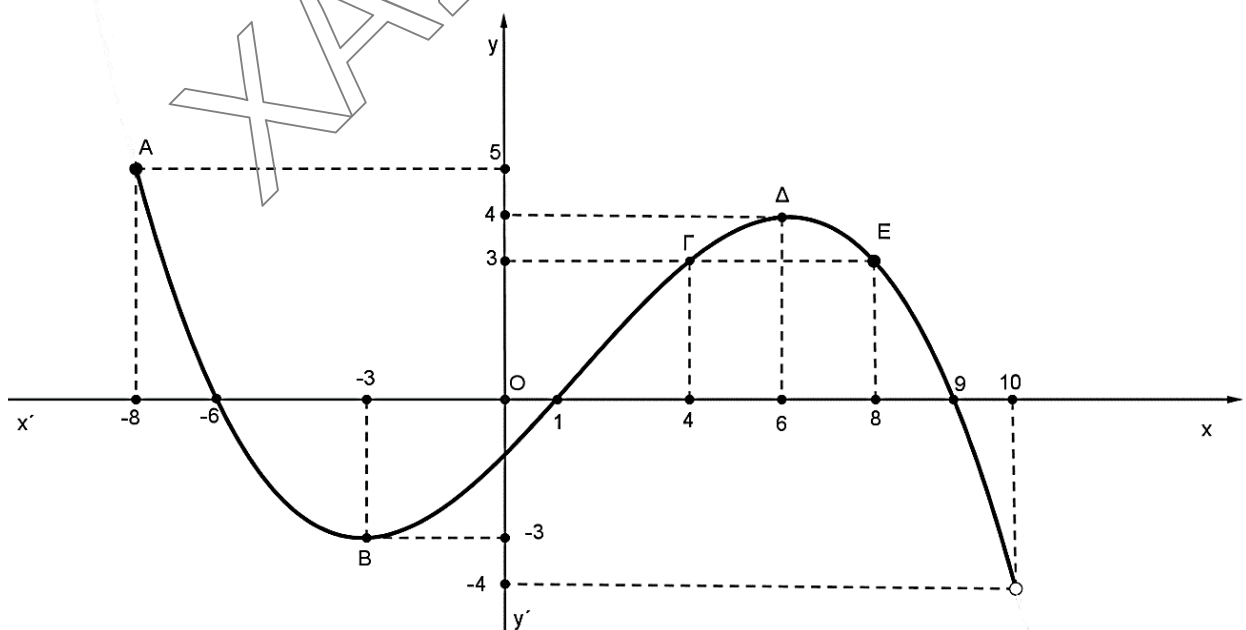
**Μονάδες 3**

- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:
- α)** Αν  $f, g, h$  είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η  $h \circ (g \circ f)$  τότε ορίζεται και η  $(h \circ g) \circ f$  και ισχύει  $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
  - β)** Μια συνάρτηση  $f$  είναι 1-1 αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει την γραφική παράσταση της  $f$  τουλάχιστον σε ένα σημείο.
  - γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει  $|\eta \mu x| > |x|$
  - δ)** Αν μια συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της τότε δεν θα είναι συνεχής σε αυτό.
  - ε)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα διαστήματα μονοτονίας της καθώς και το σύνολο τιμών της σε κάθε ένα από αυτά.

**Μονάδες 6**

**B2.** Να υπολογίσετε τα όρια (αν υπάρχουν)

$$(i) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x) - 4} \quad (ii) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{f(x)} \quad (iii) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(f(x))}{x - 1}$$

**Μονάδες 9**

**B3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό  $x_0 \in (4, 6)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = \pi$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι  $3 < f(x_0 + 2) < 4$

**Μονάδες 5**

**B4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $2021(f(x) - 2021) \cdot f(x) + 2021 = f(x)$  έχει τρεις ακριβώς ρίζες.

**Μονάδες 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f, g, h$  για τις οποίες ισχύει:

- $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \alpha x^2 + \beta$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  στις οποίες την γραφική παράσταση εφάπτεται η ευθεία  $y = -2x + 5$  στο σημείο  $A(1, f(1))$
- $g(x) = \sqrt{x}$ , για κάθε  $x \geq 0$
- $h(x) = -x + 4, x \in \mathbb{R}$

**Γ1.** Να δείξετε ότι:

(α)  $f(x) = -x^2 + 4, x \geq 0$  και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

**Μονάδες 4**

(β) ορίζεται η  $g \circ h$  με  $(g \circ h)(x) = \sqrt{4 - x}$

**Μονάδες 1**

Γ2.

(α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ότι οι συναρτήσεις  $f^{-1}, g \circ h$  είναι ίσες.

Μονάδες 5

(β) Να δείξετε ότι :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f^{-1}(x) + x) = -\infty$

Μονάδες 4

Γ3.

(α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $A(0,8)$

Μονάδες 3

(β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, f^{-1}$  τέμνονται σε σημείο  $(x_0, y_0)$  όπου το  $x_0$  ανήκει στο διάστημα  $(1, x_1)$ , όπου  $x_1$  η τεταμένη του σημείου επαφής της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ3(α) με την  $C_f$

Μονάδες 3

Γ4. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \left( (x^2 - 4)^2 + x - 4 \right) \cdot \eta\mu \left( \frac{1}{(f(x) - f^{-1}(x))} \right) \right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει :

- $x^2 \cdot f^2(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x)$  για κάθε  $x > 0$
- τέμνει την  $y = x$  σε ένα μόνο σημείο.

Δ1. Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = 0$  και ότι ο τύπος της  $f$  είναι  $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

Μονάδες 6

**Δ2.**

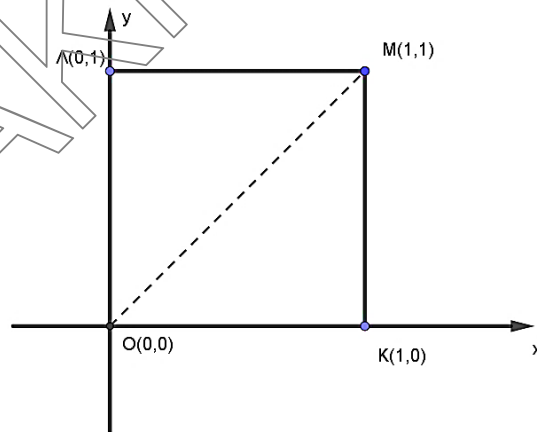
- (α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης ευθείας της  $f$  στο σημείο της  $M(1,1)$  και τα σημεία  $A, B$  που αυτή τέμνει τους άξονες  $x'$  και  $y'$  αντίστοιχα.

**Μονάδες 3**

- (β) Να δείξετε ότι το  $M$  είναι μέσο του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  και το τρίγωνο  $OAB$  έχει εμβαδόν  $E = 2\tau.μ$

**Μονάδες 2**

- Δ3.** Αν  $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο τετράγωνο  $OKML$  που ορίζουν τα σημεία  $O(0,0), K(1,0), M(1,1)$  και  $L(0,1)$  να δείξετε ότι:



- (α) η  $C_g$  τέμνει την διαγώνιο  $OM$  του τετραγώνου μόνο σε ένα σημείο

**Μονάδες 6**

- (β)  $g(x^3) - g(x^2) \geq x^3 - x^2$  για κάθε  $x \in [0,1]$

**Μονάδες 3**

- Δ4.** Να δείξετε ότι η εξίσωση  $4x^4 + 8x^3 = 1$  έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(0, +\infty)$  και στην συνέχεια να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$  και  $h(x) = -x^2 - 1$  έχουν μια κοινή εφαπτομένη.

**Μονάδες 5**