ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ**

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Ημερομηνία: Τετάρτη 5 Μαΐου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

Α1. Θεώρημα Fermat σελ.142 σχολικού.

Α2. σελ.143 σχολικού.

Α3. σελ.46 σχολικού.

Α4. **α)** Λάθος **β)** Λάθος **γ)** Σωστό **δ)** Σωστό **ε)** Λάθος.

Θέμα Β

Β1. $$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1-x}}{(x-1)\cdot(x-2)\sqrt{1-x}}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(x-1)\cdot(x-2)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-(x-1)}{(x-1)\cdot(x-2)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1}{x-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)=+\infty$$

$$\text{διότι}:\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=+\infty \quad \text{εφόσον} \quad \lim_{x\to 1}\sqrt{1-x}=0 \ \text{ και } \ \sqrt{1-x}>0 \quad \text{ενώ} \quad \lim_{x\to 1}\frac{-1}{x-2}=1$$

Β2. $f'(x)=\left(1+\sqrt{1-x}\right)'=\dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}}=\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}<0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)$ και f συνεχής στο $x=1$, άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,1]$ οπότε η f << **1 – 1** >>, επομένως είναι αντιστρέψιμη με πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(-\infty,1]$ με σύνολο τιμών

$f(A)=\left[f(1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$ αφού: $f(1)=1$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\sqrt{1-x}\right)=+\infty$

Εύρεση του τύπου της f^{-1}

Για κάθε $y\ge1$ έχουμε

$y=1+\sqrt{1-x}\Leftrightarrow y-1=\sqrt{1-x}\Leftrightarrow (y-1)^2=1-x\Leftrightarrow x=1-(y-1)^2$.

Άρα $f^{-1}(y)=1-(y-1)^2$ με $y\ge1$

Αν θέσουμε όπου y το x έχουμε $f^{-1}(x)=1-x^2+2x-1=-x^2+2x,\ A_{f^{-1}}=[1,+\infty)$

Β3. Η συνάρτηση $f^{-1}\circ g$ ορίζεται όταν το σύνολο $\{x\in A_g \text{ και } g(x)\in A_{f^{-1}}\}\neq\varnothing$

Δηλαδή $\begin{cases}x>0\\ \ln x\ge1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ge e\end{cases}\Leftrightarrow x\ge e$,άρα $(f^{-1}\circ g)(x)=-(\ln x)^2+2\ln x,\ x\ge e$.

Β4 α) $\varphi'(x)=\dfrac{-2\ln x}{x}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(-\ln x+1)}{x},\ x\ge e$.

$\varphi'(x)=0\Leftrightarrow-\ln x+1=0\Leftrightarrow x=e$

$\varphi'(x)<0\Leftrightarrow-\ln x+1<0\Leftrightarrow-\ln x<-1\Leftrightarrow x>e$

Επειδή η φ είναι συνεχής στο $[e,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$.

θα έχουμε : $x\ge e\Leftrightarrow\varphi(x)\le\varphi(e)\Leftrightarrow\varphi(x)\le1$

Άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x=e$, το $\varphi(e)=1$.

β) $\varphi''(x)=2\cdot\dfrac{(-\ln x+1)'\cdot x-(-\ln x+1)}{x^2}=2\cdot\dfrac{-1+\ln x-1}{x^2}==2\cdot\dfrac{\ln x-2}{x^2},\ x\ge e$

- $\varphi''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

  $\varphi''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 2 \Leftrightarrow x > e^2$

Το πρόσημο της φ'' και τα διαστήματα κυρτότητας της φ φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	e	e^2	$+\infty$
$\varphi''(x)$	-	0	+
$\varphi(x)$	∩		∪

Η φ κοίλη στο διάστημα $\left[e, e^2\right]$ και κυρτή στο διάστημα $\left[e^2, +\infty\right)$ ενώ το σημείο $M\left(e^2, \varphi\left(e^2\right)\right)$ δηλαδή το $M\left(e^2, 0\right)$ είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της φ που προφανώς ανήκει στον άξονα x΄x.

Θέμα Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$

- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(1 - \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = = 1 - \lim_{x\to 0^+}\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1 - 0 = 1$$

  και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = \alpha$

  Άρα $\alpha = 1$ και $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1, & x \le 0 \\ \dfrac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x}, & x > 0 \end{cases}$

- $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x^3 + 1 - 1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\left(-x^2\right) = 0 \quad (1)$$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x - \sigma\upsilon\nu x + 1}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sigma\upsilon\nu x + 1}{x^2} =$$

  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{(-\sigma\upsilon\nu x + 1)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x}{2x} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

  Από (1) και (2) προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Γ2. Για κάθε $x>0$, ισοδύναμα έχουμε :

$$f(x)<\frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow \frac{x-συνx+1}{x}<\frac{1}{2}x+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-συνx+1<\frac{1}{2}x^2+x \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+συνx-1>0$$

Έστω $g(x)=\frac{1}{2}x^2+συνx-1,\ x\geq 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $g(x)>0$ για κάθε $x>0$

$g'(x)=x-ημx>0$ στο $(0,+\infty)$ διότι $|ημx|<|x|$ για $x\neq 0$.

οπότε $-|x|<ημx<|x| \Rightarrow ημx<x$ για $x>0$

Επειδή g συνεχής στο $[0,+\infty)$, η g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Άρα για κάθε $x>0$ ισχύει $g(x)>g(0) \Leftrightarrow g(x)>0$

Γ3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x-συνx+1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{συνx}{x}\right)(1)$

- $\left|\frac{συνx}{x}\right|=\frac{|συνx|}{|x|}\leq\frac{1}{|x|}=\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$

  $\frac{-1}{x}\leq\frac{συνx}{x}\leq\frac{1}{x},\ x>0$.

  Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{συνx}{x}=0$

  Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ (από την (1))

  Επομένως η $y=1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

Γ4. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ σημείο της C_f και $(ε): y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της στο Μ.

Η $(ε)$ διέρχεται από το $A(1,-1)$ όταν:

$1-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(1-x_0) \Leftrightarrow\ 1-\left(-x_0^3+1\right)=-3x_0^2(1-x_0) \Leftrightarrow$

$1+x_0^3-1=-3x_0^2+3x_0^3 \Leftrightarrow 2x_0^3-3x_0^2+2=0$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $2x^3-3x^2+2=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty,0)$.

Έστω $h(x)=2x^3-3x^2+2$, $x\in(-\infty,0]$

- Η h είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $h(-1)\cdot h(0)=-6<0$

  Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(-1,0)$ τέτοιος ώστε $h(x_0)=0$.

Επειδή $h'(x)=6x^2-6x>0$ για κάθε $x<0$ η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.
Επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

Β-τρόπος

Η h παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)$ με $h'(x)=6x^2-6x\Leftrightarrow h'(x)=6x(x-1)$

Για κάθε $x\in A$ έχουμε $6x(x-1)>0$ άρα $h'(x)>0$ οπότε η h γνησίως αύξουσα στο $A=(-\infty,0)$ και το σύνολο τιμών της είναι $h(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}h(x),\lim\limits_{x\to0^-}h(x)\right)=(-\infty,2)$

Ο αριθμός $0\in h(A)$ άρα υπάρχει $x_0\in A$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0$, το x_0 μοναδικό διότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $A=(-\infty,0)$

Θέμα Δ

Δ1. $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ και $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}>0$ για κάθε $x>-1$.

Άρα $f'(x)$ γνησίως αύξουσα και $f'(0)=0$ άρα η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα την $x=0$

Από τη μονοτονία της f' και τη ρίζα της $x=0$ βρίσκουμε το πρόσημό της.

- Για κάθε $x<0$ ισχύει $f'(x)<f'(0)\Leftrightarrow f'(x)<0$
- Για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)>f'(0)\Leftrightarrow f'(x)>0$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0,+\infty)$
Στη θέση $x=0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0)=0$ το οποίο προφανώς είναι μοναδικό.

Δ2. Για όπου y το x_0 και $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$\left|g(x)-g(x_0)\right| \le (x-x_0)^2$ και για $x \ne x_0$ έχουμε :

$$\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \le |x-x_0| \Leftrightarrow -|x-x_0| \le \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \le |x-x_0|$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|=0,$ σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=0$ δηλαδή $g'(x_0)=0$, άρα $g'(x)=0, x\in\mathbb{R}$ αφού το x_0 είναι τυχαίο σημείο. Επομένως η g είναι σταθερή.

Δ3. Η g είναι σταθερή και $g(0)=21$. Άρα $g(x)=21$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε την εξίσωση $f(x)=21$ με $x\in(-1,+\infty)$.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f.

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(-1,0]$ με

$f(A_1)=\left[f(0), \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)\right)=[0,+\infty)$ διότι :

- $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\left[e^x-1-\ln(x+1)\right]=e^{-1}-1-(-\infty)=+\infty$
  διότι $\lim\limits_{x\to -1}\ln(x+1)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln u=-\infty$ (όπου $x+1=u$)

Η f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[0,+\infty)$ με

$f(A_1)=\left[f(0), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right)=[0,+\infty)$ διότι :

- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[e^x-1-\ln(x+1)\right]$ (Μορφή $+\infty-\infty$) $=$
  $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}\right)\right]$ (1)

Είναι $\lim\limits_{x\to +\infty} e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{e^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln(x+1))'}{(e^x)'}=\ldots=0$

Άρα από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

Το $21 \in f\left(A_1\right)$ άρα υπάρχει $\rho_1 \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f\left(\rho_1\right)=21$,το ρ_1 μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα στο A_1 και προφανώς $\rho_1<0$.

Το $21 \in f\left(A_2\right)$ άρα υπάρχει $\rho_2 \in (0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f\left(\rho_2\right)=21$,το ρ_2 μοναδικό αφού η f γνησίως φθίνουσα στο A_1 και προφανώς $\rho_2>0$.

Δ4. α) Ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[\rho_1,0\right]$

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in \left(\rho_1,0\right)$ τέτοιος ώστε $f'\left(\xi_1\right)=\dfrac{f(0)-f\left(\rho_1\right)}{0-\rho_1}=\dfrac{21}{\rho_1}$ (1)

Ισχύει το Θ.Μ.Τ. για την f στο $\left[0,\rho_2\right]$.

Άρα υπάρχει $\xi_2 \in \left(0,\rho_2\right)$ τέτοιος ώστε $f'\left(\xi_2\right)=\dfrac{f\left(\rho_2\right)-f(0)}{\rho_2-0}=\dfrac{21}{\rho_2}$ (2)

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε $\rho_1 \cdot f'\left(\xi_1\right)=\rho_2 \cdot f'\left(\xi_2\right)$

β) Για κάθε $\rho_1<x\le 0$ ισχύει $f\left(\rho_1\right)>f(x)\ge f(0)$ δηλαδή $0\le f(x)<21$

αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$

- Για κάθε $0\le x<\rho_2$ ισχύει $f(0)\le f(x)<f\left(\rho_2\right)$ δηλαδή $0\le f(x)<21$.
  Αφού η f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

  Επομένως $0\le f(x)<21$ για κάθε $x\in\left(\rho_1,\rho_2\right)$.