



**ΤΑΞΗ:** Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ:** ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Ημερομηνία: Σάββατο 4 Μαΐου 2019**  
**Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες**

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ Α

**A.1.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  είναι ( $\varepsilon$ ):  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ .

**Μονάδες 11**

**A.2.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η εξίσωση  $y = \frac{1}{2p}x^2$  με  $p > 0$  παριστάνει παραβολή με άξονα συμμετρίας τον  $y'y$ .

**β.** Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$ , παριστάνει μια ευθεία για κάθε  $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ .

**γ.** Τα διανύσματα  $\vec{i} = (1, 0)$  και  $\vec{j} = (0, 1)$  είναι ίσα.

**δ.** Η απόσταση του σημείου  $M_0(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $\varepsilon$  με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι ίση με  $d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

**ε.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 = a$ , παριστάνει κύκλο για κάθε  $a \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 10**

**A.3.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Αν δυο διανύσματα έχουν ίσα μέτρα, τότε είναι ίσα».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A** αν είναι αληθής ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

**Μονάδες 1**

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α.**

**Μονάδες 3**

### ΘΕΜΑ Β

Στον εναέριο χώρο της Ελλάδας κινούνται δύο αεροπλάνα που ακολουθούν τις παρακάτω πορείες:

- Το πρώτο αεροπλάνο κινείται στη γραμμή  $\gamma_1$  όπου κάθε σημείο της σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (στο χάρτη) είναι της μορφής  $A(\lambda+1, \lambda+3)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- Το δεύτερο αεροπλάνο κινείται στη ευθεία  $\gamma_2$  που περνάει από το αεροδρόμιο των Ιωαννίνων με συντεταγμένες  $I(-2, -2)$  και είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{v} = (-2, 2)$ .

**B.1.** Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής  $\gamma_1$ .

**Μονάδες 4**

**B.2.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\gamma_2$ .

**Μονάδες 7**

**B.3.** Στο σημείο  $O(0,0)$  βρίσκεται το αεροδρόμιο Αθηνών. Αν οι γραμμές είναι οι ευθείες  $\gamma_1: y = x + 2$  και  $\gamma_2: y = -x - 4$ .

**α.** ποιο αεροπλάνο θα περάσει πιο κοντά από το αεροδρόμιο Αθηνών;

**Μονάδες 7**

**β.** να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $ION$  όπου  $N$  το σημείο τομής μεταξύ των  $\gamma_1$  και  $\gamma_2$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η παραβολή  $C_1 : y^2 = 2\vec{\beta}(\vec{\beta} - 2\vec{a})x$  και ο κύκλος  $C_2 : x^2 + y^2 - |\vec{\beta}|(x + 4(\vec{a} \cdot \vec{\beta})y) + 15 = 0$ , όπου  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  διανύσματα για τα οποία ισχύουν  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$  και  $(\vec{a} + \vec{\beta})(3\vec{a} - \vec{\beta}) = 1$ .

Γ.1. Να αποδείξετε ότι  $\vec{a}\vec{\beta} = 1$  και  $\left(\vec{a}, \vec{\beta}\right) = \frac{\pi}{3}$

**Μονάδες 6**

Γ.2. Να βρείτε την εστία  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας ( $\delta$ ) της παραβολής  $C_1$ , καθώς επίσης το κέντρο  $K$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $C_2$ .

**Μονάδες 7**

Γ.3. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ( $\varepsilon$ ) της παραβολής  $C_1$  στο σημείο της  $A(1,2)$  εφάπτεται και στο κύκλο  $C_2$ .

**Μονάδες 6**

Γ.4. Να βρεθεί η μέγιστη και ελάχιστη απόσταση της εστίας  $E(1,0)$  από το κύκλο  $C_2$ .

**Μονάδες 6****ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η εξίσωση

$$(\lambda^4 + \lambda^2)x^2 + (-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda + 2)y^2 - 6\lambda(\lambda^2 + 1)x - (8\lambda^2 + 8)y + 16\lambda^2 + 16\lambda^4 = 0, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δ.1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο  $C$  αν και μόνο αν  $\lambda = 1$ .

**Μονάδες 4**

Δ.2. Αν  $\lambda = 1$ , τότε:

α. Να βρείτε το κέντρο  $\Theta$  και την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $C$ .

**Μονάδες 4**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2019**  
Β' ΦΑΣΗ**E\_3.Μλ2Θ(ε)**

- β. Να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη απόσταση των σημείων του κύκλου  $C$ , από την ευθεία  $(\eta): 3x + 4y + 15 = 0$ .

**Μονάδες 5**

- γ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C$  που διέρχονται από την αρχή των αξόνων  $O$ .

**Μονάδες 8**

- δ. Έστω  $K$  και  $L$  σημεία του κύκλου  $C$  για τα οποία ισχύει  $KL = 6$ . Να βρείτε το μέτρο  $|\overline{OK} + \overline{OL}|$ .

**Μονάδες 4**

ΧΑΡΙΣΙΑΚΗ