ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Θέμα 1ο

A_1, A_2, A_3	Θεωρία (Σχολικό Βιβλίο σελ. 60-61)	
B_1:	α	4
	β	1
	γ	2
B_2	το Γ	

Θέμα 2ο

α) Είναι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|\cdot \text{συν}\,\frac{2\pi}{3} = 1\cdot 1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\left(4\vec{\beta}^2 + 2\vec{\alpha}\right)^2 = 16\vec{\beta}^2 + 4\vec{\alpha}^2 + 16\vec{\alpha}\vec{\beta} = 16 + 4 - 8 = 12$$

$$\left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

β) Από τη διανυσματική ακτίνα μέσου είναι

$$2\,\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$$

ή $2\,\overrightarrow{AM} = \left(2\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) - 3\vec{\beta}$

ή $\overrightarrow{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Ακόμα, $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB} = -3\vec{\beta} - (2\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = -4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}$

γ) Είναι $\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B\Gamma}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|}$ (1)

αλλά $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{B\Gamma} = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)\left(-4\vec{\beta} - 2\vec{\alpha}\right)$

$= 4\vec{\beta}^2 - 2\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$

$= 4 - 2 + 1 = 3$

και $\left|\overrightarrow{AM}\right|^2 = \left|\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right|^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2 = 3$, άρα $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \sqrt{3}$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right|^2 = \left|-4\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right|^2 = \left(4\vec{\beta}-2\vec{\alpha}\right)^2 = 12, \quad \text{άρα } \left|\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}\right| = 2\sqrt{3}$$

Έτσι η (1) δίνει

$$\text{συν}\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\right) = \frac{3}{\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}, \text{ οπότε: } \left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{AM}},\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Θέμα 3ο

1ος τρόπος.

α) Αφού ο α είναι περιττός, υπάρχει ακέραιος λ, ώστε:

α = 2λ+1 άρα κ-1 = 2λ+1 ⇔ κ =2λ+2

Τότε, β = 3κ+1 = 3(2λ+2) + 1 = 6λ + 6 + 1 = 6λ + 7 = 2(3λ+3) + 1 οπότε β=περιττός

β)

Είναι	κ-1/3κ+1 πρέπει κ-1 ≠ 0 ⇔ κ ≠ 1 (1)
Και προφανώς	κ-1/3(κ-1)
΄Αρα	κ-1/3κ+1-3(κ-1) ⇔ κ-1/4
Έτσι	κ-1=±1, κ-1=±2, κ-1=±4
Οπότε,	κ=0, κ=2, κ=-1, κ=3, κ= -3, κ=5 Δεκτές τιμές από (1).

γ)

i)	2α+1 = 2(κ-1)+1=2κ-1
	β-3 = 3κ+1-3 = 3κ-2
Έστω	δ = (2α+1, β-3) τότε
	δ/2α+1 ⇔ δ/2κ-1
	δ/β-3 ⇔ δ/3κ-2
Έτσι	δ/3(2κ-1)-2(3κ-2) ⇔ δ/1, οπότε δ=1

ii)

$$[2\alpha+1,\ \beta-3] = \left|(2\alpha+1)(\beta-3)\right|$$
$$= \left|(2\kappa-1)(3\kappa-2)\right|$$
$$= \left|6\kappa^2-7\kappa+2\right|$$

Το τριώνυμο $6\kappa^2-7\kappa+2$ έχει ρίζες $\kappa_1=\frac{1}{2}$, $\kappa_2=\frac{2}{3}$ και γίνεται αρνητικό μεταξύ των ριζών του, όπου όμως δεν υπάρχει ακέραια τιμή του κ. Έτσι $6\kappa^2-7\kappa+2>0$ οπότε

$$\left|6\kappa^2-7\kappa+2\right| = 6\kappa^2-7\kappa+2$$

Και έτσι $\left|2\alpha+1,\beta-3\right| = 6\kappa^2-7\kappa+2$

2ος τρόπος.

Από $\alpha=\kappa-1$ και $\beta=3\kappa+1$ προκύπτει $\beta=3\alpha+4$

α) με α περιττό είναι 3α περιττός, έτσι 3α+4 περιττός, άρα β περιττός.
β) $\alpha/\beta \Leftrightarrow \alpha/3\alpha+4 \Leftrightarrow \alpha/4 \Leftrightarrow \kappa-1/4$ κλπ.
γ) $(2\alpha+1, \beta-3) = (2\alpha+1, 3\alpha+1) = (2\alpha+1, 3\alpha+1-2\alpha-1) = (2\alpha+1, \alpha) = (2\alpha+1-2\alpha, \alpha) = (1, \alpha) = 1$
δ) παρομοίως.

3ος τρόπος για το β).

$$\alpha/\beta \Leftrightarrow \beta=\lambda\alpha \Leftrightarrow 3\kappa+1=\lambda(\kappa-1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \kappa = \frac{\lambda+1}{\lambda-3} = \frac{\lambda-3+1}{\lambda-3} = 1+\frac{4}{\lambda-3} \in Z$$

άρα $\lambda-3=\pm1, \pm2, \pm4$ και άρα $\kappa=1+(\pm4)$, $1+(\pm2)$, $1+(\pm1)$ κλπ. (... με τους περιορισμούς των α, λ).

Θέμα 4ο.

α) C_1: $(x-12)^2+(y-6)^2=10$
C_2: $(x-12)^2+(y-6)^2=16$

β) Είναι $(KA)=\ldots=\sqrt{5}<\rho_1=\sqrt{10}$
$(KB)=\ldots=\sqrt{13}$, $\rho_1<\sqrt{13}<\rho_2=4$

Άρα:

- Το Α ανήκει στο κυκλικό δίσκο που ορίζει ο C_1 άρα στο Α η λήψη είναι "πολύ καλή".
- Το Β είναι εξωτερικό σημείο του C_1 και εσωτερικό του C_2 οπότε στο β η λήψη είναι "καλή".

γ) (Σχετική θέση ευθείας και κύκλου.)

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|12-6-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

και αφού $\sqrt{10} < \frac{5}{\sqrt{2}} < 4$

είναι $\rho_1 < d(K, \varepsilon) < \rho_2$

Επομένως, υπάρχει τμήμα με "καλή" λήψη και δεν υπάρχει αντίστοιχο τμήμα με "πολύ καλή" λήψη.