



Β' ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝ. ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**Θέμα 1**

α) Για τους ακέραιους  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  να αποδείξετε ότι:

i) Αν  $\alpha|\beta$  και  $\beta|\gamma$  τότε  $\alpha|\gamma$ .

ii) Αν  $\alpha|\beta$  και  $\alpha|\gamma$  τότε  $\alpha|(\beta + \gamma)$ .

**Μονάδες 10**

β) i) Δίνονται τα σημεία  $E'$  και  $E$  του επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες  $E'$  και  $E$ ;

**Μονάδες 5**

ii) Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2p \cdot x$ . Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο  $M(x_1, y_1)$ .

**Μονάδες 2**

γ) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστή** ή **Λάθος**.

i) Αν  $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$  τότε ισχύει πάντα  $|\vec{a} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{a}| |\vec{\beta}|$ .

ii) Το διάνυσμα  $\vec{n} = (-A, B)$  είναι κάθετο στην ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ .

iii) Η εκκεντρότητα της ισοσκελούς υπερβολής  $x^2 - y^2 = a^2$  είναι  $\frac{\gamma}{a} = \sqrt{2}$ .

iv) Έστω οι ακέραιοι  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  και ότι  $\alpha|(\beta + \gamma)$  τότε κατ' ανάγκη  $\alpha|\beta$  και  $\alpha|\gamma$ .

**Μονάδες 8**

**Θέμα 2**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$  και  $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ .

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $AM$  διάμεσός του για το οποίο ισχύουν:

$$\vec{AB} = 2\vec{a} - \vec{\beta} \quad \text{και} \quad \vec{AM} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$$

α) Να βρείτε το  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ .

**Μονάδες 5**

β) Να εκφράσετε το  $\overrightarrow{ΑΓ}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{α}$  και  $\vec{β}$ .

**Μονάδες 5**

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου  $\overline{ΑΜ}$ .

**Μονάδες 7**

δ) Να αποδείξετε ότι η γωνία των  $\overline{ΑΜ}$  και  $\vec{α}$  είναι ίση με  $\frac{\pi}{6}$

**Μονάδες 8**

### Θέμα 3

Δίνονται τα σημεία  $A(1,3)$ ,  $B(-2,2)$  και η ευθεία  $\varepsilon: 3x + y + a = 0$  όπου  $a \in \mathbb{R}$ .

α) Αν η απόσταση του  $A$  από το  $B$  είναι ίση με την απόσταση του  $A$  από την ευθεία  $\varepsilon$ , να βρείτε την τιμή του  $a$ .

**Μονάδες 8**

β) Για την τιμή  $a = 4$  να βρείτε:

i) Το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές τα σημεία  $A$ ,  $B$  και το σημείο  $\Gamma$  που η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $y'y$ .

**Μονάδες 8**

ii) Ποιο σημείο της ευθείας  $\varepsilon$  έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή  $O$  των αξόνων.

**Μονάδες 9**

### Θέμα 4

Δίνεται η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 + (\eta\mu\theta)x - (\sigma\upsilon\nu\theta)y = 2$  όπου  $\theta \in \mathbb{R}$ . (1)

α) Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

**Μονάδες 6**

β) Να αποδείξετε ότι, όταν το  $\theta$  μεταβάλλεται, τα κέντρα των κύκλων  $C$  κινούνται σε κύκλο του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

**Μονάδες 6**

γ) Να βρείτε τις τιμές του  $\theta \in [0, \pi)$  αν είναι γνωστό ότι ο κύκλος  $C$  διέρχεται από το σημείο  $M(1, -1)$ .

**Μονάδες 6**

δ) Έστω  $K$  το κέντρο του κύκλου  $C$  και  $A, B$  τα σημεία τομής του με την ευθεία  $OK$  (όπου  $O$  η αρχή των αξόνων). Να υπολογίσετε τις αποστάσεις  $(OA)$  και  $(OB)$ .

**Μονάδες 7**