

ΤΑΞΗ: Β' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 11 Μαΐου 2024

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη ιδιότητας λογαρίθμων, σελίδα 175 σχολικού βιβλίου.

Α2. Ορισμός μονοτονίας συνάρτησης, σελίδα 31 σχολικού βιβλίου.

Α3. Σωστή απάντηση η Β)  $x - 3y = -5$ .Το  $(\Sigma) \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$  έχει μοναδική λύση την

$$(x, y) = (1, 2) \text{ αφού } \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 3y = -5 \end{cases} \begin{array}{l} \square \\ -2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ -2x + 6y = 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7y = 14 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

Β1.  $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0$ .Πιθανές ακέραιες ρίζες οι  $\pm 1, \pm 2$ .Κάνουμε σχήμα Horner για  $\rho = 1$

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 0 & 1 & -2 & \rho = 1 \\
 \downarrow & 1 & 1 & 2 & \\
 \hline
 1 & 1 & 2 & 0 & 
 \end{array}$$

Από την ταυτότητα της διαίρεσης παίρνουμε

$$x^3 + x - 2 = (x - 1)(x^2 + x + 2) \text{ άρα } (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 1 = 0 \text{ ή } x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Η εξίσωση  $x^2 + x + 2 = 0$  είναι αδύνατη στο σύνολο  $\mathbb{R}$  αφού

$$\Delta = 1 - 8 = -7 < 0.$$

Άρα η εξίσωση  $P(x) = 0$  έχει μοναδική λύση την  $x = 1$ .

**B2.** Αφού τα  $P(x), Q(x)$  έχουν κοινή λύση, η  $x = 1$  είναι ρίζα και του πολυωνύμου  $Q(x)$ .

$$\text{Άρα } Q(1) = 0 \Leftrightarrow 1 - a + 11 - a = 0 \Leftrightarrow 12 = 2a \Leftrightarrow a = 6.$$

Για  $a = 6$  είναι  $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, x \in \mathbb{R}$ .

**B3.**  $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \leq 0$ .

Κάνουμε σχήμα Horner για το  $Q(x)$  και  $\rho = 1$ .

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & -6 & 11 & -6 & \rho = 1 \\
 \downarrow & 1 & -5 & 6 & \\
 \hline
 1 & -5 & 6 & 0 & 
 \end{array}$$

Έτσι  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$  οπότε

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) \leq 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης  $x^2 - 5x + 6 = 0$  είναι οι 2, 3.

Άρα  $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = 3$ .

Κάνουμε πίνακα προσήμου:

$x$	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$x - 1$	—	○	+	+	+		
$x^2 - 5x + 6$	+	+	○	—	○	+	
$Q(x)$	—	○	+	○	—	○	+

Από τον πίνακα προκύπτει ότι  $Q(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, 3]$ .

**B4.** A' τρόπος

Η γραφική παράσταση της  $f$  προκύπτει από οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης  $y = Q(x)$  κατά μία μονάδα προς τα αριστερά. Αφού η γραφική παράσταση της  $y = Q(x)$  τέμνει τον  $x'$  άξονα στα σημεία

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$  η  $C_f$  θα τέμνει τον  $x'$  άξονα στα σημεία με τετμημένη  $x'_1 = 0, x'_2 = 1, x'_3 = 2$ .

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον  $x'$  άξονα τα  $A(0,0), B(1,0)$  και  $\Gamma(2,0)$ .

B' τρόπος

Θα λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = 0 \Leftrightarrow Q(x+1) = 0$ .

Θέτουμε  $u = x + 1$  οπότε η εξίσωση γίνεται  $Q(u) = 0$ . Η τελευταία έχει ρίζες  $u = 1$  ή  $u = 2$  ή  $u = 3$  και επειδή ισχύει  $x = u - 1$  παίρνουμε  $x = 0$  ή

$x = 1$  ή  $x = 2$ .

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον  $x'$  άξονα τα  $A(0,0), B(1,0)$  και  $\Gamma(2,0)$ .

Γ' τρόπος

Αφού  $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$  θα είναι

$$f(x) = Q(x+1) = (x+1)^3 - 6(x+1)^2 + 11(x+1) - 6 \text{ ή}$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 6x^2 - 12x - 6 + 11x + 11 - 6 \text{ ή}$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Άρα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της  $f$  με τον  $x'$  άξονα τα  $A(0,0), B(1,0)$  και  $\Gamma(2,0)$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. Χρησιμοποιώντας ιδιότητες της αναγωγής στο 1<sup>ο</sup> τεταρτημόριο παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 & \bullet \sin(21\pi - \theta) = \sin(20\pi + \pi - \theta) = \sin(\pi - \theta) = -\sin\theta \\
 & \bullet \cos(17\pi + \theta) = \cos(16\pi + \pi + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\
 & \bullet \varepsilon\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\left(10\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\theta \\
 & \bullet \eta\mu\left(\frac{19\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(\frac{20\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(10\pi - \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\
 & = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(-\theta) = -\sin\theta
 \end{aligned}$$

Άρα

$$A = \frac{-\sin\theta \cdot \sigma\varphi\theta}{\sigma\varphi\theta \cdot (-\sin\theta)} = 1$$

οπότε ο τύπος της  $f$  γίνεται  $f(x) = 2 \cdot \sin 2x + B$ .

Αφού η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $\kappa\left(\frac{\pi}{2}, -2\right)$  έχουμε

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 & \Leftrightarrow 2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + B = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin\pi + B = -2 \Leftrightarrow \\
 -2 + B = -2 & \Leftrightarrow B = 0.
 \end{aligned}$$

Γ2. Έχουμε  $f(x) = 2 \cdot \sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Θα λύσουμε την εξίσωση  $f(x) = -2$  για  $x \in [-\pi, \pi]$ .

$$\text{Έχουμε } f(x) = -2 \Leftrightarrow 2 \cdot \sin 2x = -2 \Leftrightarrow \sin 2x = -1$$

Αντικαθιστώντας το -1 με  $\sin\pi$  παίρνουμε

$$\sin 2x = \sin\pi \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi + \pi \text{ ή } 2x = 2\kappa\pi - \pi \Leftrightarrow$$

$$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}.$$

• Για  $x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$  και  $x \in [-\pi, \pi]$  παίρνουμε

$$-\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi - \frac{\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-3\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{3}{2} \leq \kappa \leq \frac{1}{2} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\implies} \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = 0.$$

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2024**  
Β' ΦΑΣΗ

**E\_3.Μλ2ΓΑ(α)**

Για  $\kappa = -1$ :  $x = -\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2}$

$\kappa = 0$ :  $x = \frac{\pi}{2}$

- Για  $x = \kappa\pi - \frac{\pi}{2}$  και  $x \in [-\pi, \pi]$  έχουμε

$$-\pi \leq \kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\pi + \frac{\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{2} \leq \kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{2} \leq \kappa \leq \frac{3}{2} \stackrel{\kappa \in \mathbb{Z}}{\implies} \kappa = 0 \text{ ή } \kappa = 1.$$

Για  $\kappa = 0$ :  $x = -\frac{\pi}{2}$

$\kappa = 1$ :  $x = \pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ .

Άρα τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  και της  $y = -2$  είναι  $A(-\frac{\pi}{2}, -2)$  και  $B(\frac{\pi}{2}, -2)$ .

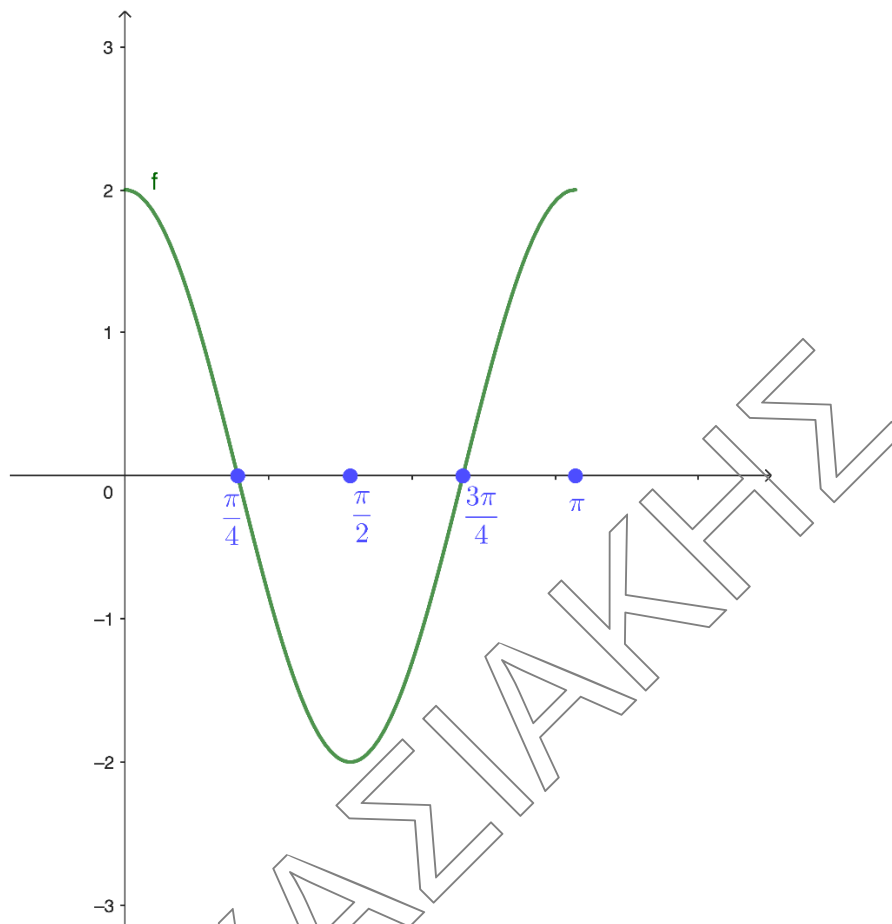
**Γ3.** Για την  $f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Έχει περίοδο  $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$ , μέγιστη τιμή την 2 και ελάχιστη τιμή την  $-2$ .

Πίνακας τιμών για  $x \in [0, \pi]$ :

$x$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$
$2x$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$	$2\pi$
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$f(x) = 2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$	2	0	-2	0	2

Η γραφική παράσταση της  $f$  στο  $[0, \pi]$  :



Γ4. Γνωρίζουμε ότι η μέγιστη τιμή της  $f$  στο  $\mathbb{R}$  είναι η 2 δηλαδή  $f(x) \leq 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Επίσης, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  έχουμε  $e^x > 0 \Leftrightarrow e^x + 2 > 2$ .

Άρα δεν υπάρχει  $x \in \mathbb{R}$  ώστε να ισχύει  $f(x) = e^x + 2 \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu 2x = e^x + 2$  δηλαδή, η εξίσωση είναι αδύνατη.

#### ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αφού το 2 ρίζα της  $f(x)$  θα είναι  $f(2) = 0 \Leftrightarrow$

$$2^{\nu+2} - 5 \cdot 2^{2\nu-2} + 4 \cdot 2^{\nu-2} = 0 \Leftrightarrow 2^\nu \cdot 2^2 - 5 \cdot \frac{2^{2\nu}}{2^2} + 4 \cdot \frac{2^\nu}{2^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$4 \cdot 2^\nu - 5 \cdot \frac{2^{2\nu}}{4} + 4 \cdot \frac{2^\nu}{4} = 0 \Leftrightarrow 16 \cdot 2^\nu - 5 \cdot 2^{2\nu} + 4 \cdot 2^\nu = 0 \Leftrightarrow$$

$$20 \cdot 2^\nu = 5 \cdot 2^{2\nu} \Leftrightarrow 4 \cdot 2^\nu = 2^{2\nu} \Leftrightarrow 2^{\nu+2} = 2^{2\nu} \Leftrightarrow \nu + 2 = 2\nu \Leftrightarrow \nu = 2$$

Δ2. Για  $v = 2$  ο τύπος της  $f$  γίνεται  $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 + 4, x \in \mathbb{R}^*$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 5 \cdot x^2 + 4 = 0, x \in \mathbb{R}^*$$

Θέτουμε  $x^2 = \omega > 0$  οπότε η εξίσωση γίνεται  $\omega^2 - 5\omega + 4 = 0$  με ρίζες

$$\omega = 1 \text{ ή } \omega = 4.$$

$$\text{Άρα } x^2 = 1 \text{ ή } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ ή } x = \pm 2.$$

Το τριώνυμο  $\omega^2 - 5\omega + 4$  με ρίζες 1 και 4 γράφεται

$$\omega^2 - 5\omega + 4 = (\omega - 1) \cdot (\omega - 4) \text{ και θέτοντας για } \omega \text{ το } x^2 \text{ έχουμε}$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4), x \in \mathbb{R}^*$$

Για το πρόσημο της  $f(x)$  έχουμε :

$x$	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$1$	$2$	$+\infty$			
$x^2 - 1$	+	+	0		-	+	+			
$x^2 - 4$	+	0	-	-	-	0	+			
$f(x)$	+	0	-	+		+	0	-	0	+

Έτσι  $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$  και

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, -1) \cup (1, 2).$$

Δ3. α) Για  $f(x) = x^4 - 5 \cdot x^2 + 4, x \in \mathbb{R}^*$  έχουμε

i. Για κάθε  $x \in \mathbb{R}^* \Rightarrow -x \in \mathbb{R}^*$  και

$$f(-x) = (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 = f(x)$$

άρα η  $f$  είναι άρτια.

ii. Αφού η  $f$  άρτια για κάθε  $a \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $f(-a) = f(a)$  οπότε

$$f(a) \cdot f(-a) = f(a) \cdot f(a) = f^2(a) \geq 0$$

β) Γνωρίζω ότι  $\ln \frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = -\ln x$  οπότε η ανίσωση γίνεται

$$f(\ln x) \cdot f(\ln \frac{1}{x}) \leq 0 \Leftrightarrow f(\ln x) \cdot f(-\ln x) \leq 0 \quad (1)$$

Όμως από Δ3ii) έχω ότι για κάθε  $a \in \mathbb{R}^*$  ισχύει  $f(a) \cdot f(-a) \geq 0$ , οπότε θα είναι

$$f(\ln x) \cdot f(-\ln x) \geq 0 \quad (2).$$

Από (1) και (2) τελικά παίρνουμε  $f(\ln x) \cdot f(-\ln x) = 0 \Leftrightarrow$

$$f(\ln x) \cdot f(\ln x) = 0 \Leftrightarrow f(\ln x) = 0.$$

Οι ρίζες της  $f(x) = 0$  είναι οι  $-2, -1, 1, 2$  οπότε παίρνουμε

$$\ln x = -2 \text{ ή } \ln x = -1 \text{ ή } \ln x = 1 \text{ ή } \ln x = 2 \Leftrightarrow$$

$$x = e^{-2} \text{ ή } x = e^{-1} \text{ ή } x = e \text{ ή } x = e^2, \text{ δεκτές ρίζες.}$$

Δ4. Για  $x_0 > 0$  έχουμε

$$x_0 + \ln x_0 = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = -x_0 \Leftrightarrow e^{\ln x_0} = e^{-x_0} \Leftrightarrow \frac{x_0}{e^{-x_0}} = 1 \Leftrightarrow x_0 \cdot e^{x_0} = 1 \text{ άρα ο αριθμός } \rho = x_0 \cdot e^{x_0} \text{ είναι ρίζα της } f(x) = 0.$$

ΧΑΝΣΙΑΚΗ