



ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ/ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Σάββατο 13 Ιανουαρίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για οποιαδήποτε γωνία ω να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A λέγεται άρτια;

Μονάδες 5

Α3. Για κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- Κάθε γραμμικό σύστημα 2×2 θα είναι είτε αδύνατο είτε θα έχει μοναδική λύση.
- Μία συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$, αν ισχύει $f(x_0) \leq f(x)$ για κάθε $x \in A$.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = f(x + c)$, $c > 0$ προκύπτει με κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης f προς τα πάνω κατά c μονάδες.
- Οι γωνίες που διαφέρουν κατά 180° έχουν την ίδια εφαπτομένη και συνεφαπτομένη.
- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, $x \in \mathbb{R}$ έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2 \cdot \alpha - \beta = 1 \\ -\alpha + 2 \cdot \beta = 1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση την $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.

Μονάδες 7

β) Να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2 \cdot \alpha - \beta = 1 \\ -6 \cdot \alpha + 3 \cdot \beta = -3 \end{cases}$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων και ότι μία από αυτές είναι η $(\alpha, \beta) = (1, 1)$.

Μονάδες 7

B2. Για την συνάρτηση $f(x) = 3a \cdot \eta\mu(2\beta x)$, $x \in \mathbb{R}$ όπου a και β οι τιμές του ερωτήματος B1.

α) Να βρείτε την ελάχιστη, την μέγιστη τιμή και την περίοδο της

Μονάδες 4

β) Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση στο διάστημα $[0, \pi]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \eta\mu(3\pi + x) + 2\sigma\upsilon\nu(5\pi - x), x \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 2 \cdot (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)$.

Μονάδες 6

Γ2. Για τη συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$, $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι :

α) $g(x) = 4(1 - 2\eta\mu^2 x)$

Μονάδες 5

β) Η g είναι άρτια.

Μονάδες 3

Γ3. Να βρείτε το σύνολο των τετμημένων των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)$ με την ευθεία $y = 2$ στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy .

Μονάδες 7

Γ4. Αν $x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$ είναι ένας τύπος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = 2$ να εξετάσετε αν η τιμή $x = \frac{689\pi}{6}$ προκύπτει από αυτόν.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f(x) = (3 - \alpha^2) \cdot x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, \alpha)$ και η συνάρτηση $g(x) = \frac{4 \cdot x}{x^2 + 4}$.

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. Η παράμετρος α είναι ίση με -2 .

Μονάδες 5

Δ2. Η συνάρτηση g είναι περιττή και ότι έχει μέγιστη τιμή την 1 για $x = 2$.

Μονάδες 8

Δ3. Ισχύει ότι $f(5 - \sin^2 x) < f(4\eta\mu x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ4. Οι γωνίες $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$ είναι παραπληρωματικές και έπειτα να λύσετε την εξίσωση

$$g(2024) \cdot x^2 + g\left(-\eta\mu \frac{3\pi}{8}\right) + g(-2024) + g\left(\eta\mu \frac{5\pi}{8}\right) = 0.$$

Μονάδες 6