

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Πέμπτη 5 Ιανουαρίου 2023
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Απόδειξη σελίδα 25 σχολικού βιβλίου
A2. Απόδειξη σελίδα 33 σχολικού βιβλίου
A3. (α) Λάθος (β) Σωστό (γ) Λάθος (δ) Σωστό (ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (3, -1)$, και έστω $\vec{\gamma} = (x, y)$ τότε

$$\vec{a} + 2\vec{\gamma} = \vec{\beta} \Leftrightarrow (3, -1) + 2(x, y) = (5, 3) \Leftrightarrow (3 + 2x, -1 + 2y) = (5, 3)$$

Από την τελευταία ισότητα έχουμε
$$\begin{cases} 3 + 2x = 5 \\ 2y - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2 \\ 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

άρα $\vec{\gamma} = (1, 2)$

B2. Η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ επομένως

$$\lambda_{\varepsilon} = \lambda_{\vec{\gamma}} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow \lambda_{\varepsilon} = 2$$

Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 4)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{\varepsilon} = 2$ έχει εξίσωση :

$$(\varepsilon): y - 4 = 2 \cdot (x - (-1)) \Leftrightarrow y - 4 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y - 4 = 2x + 2 \Leftrightarrow \boxed{y = 2x + 6}$$

B3. Για τα σημεία τομής της (ε) με τους άξονες έχουμε

$$\text{Για τον } x'x \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 0 = 2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases} \quad \text{άρα } B(-3,0)$$

$$\text{Για τον } y'y \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \cdot 0 + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \quad \text{άρα } \Gamma(0,6)$$

(i) Μ μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ :

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{3}{2} \\ y_M = \frac{6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = -\frac{3}{2} \\ y_M = 3 \end{cases} \quad \text{άρα } M\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$$

Η ευθεία ΟΜ συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda_{OM} = \frac{y_M - y_O}{x_M - x_O} \Leftrightarrow \lambda_{OM} = \frac{3 - 0}{-\frac{3}{2} - 0} \Leftrightarrow \lambda_{OM} = -2$$

Άρα η ευθεία ΟΜ περνάει από το $M\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ και έχει κλίση $\lambda_{OM} = -2$ οπότε η

$$\text{εξίσωσή της είναι } \varepsilon_{OM} : y - 3 = -2 \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow y - 3 = -2x - 3 \Leftrightarrow y = -2x$$

Παρατήρηση : Θα μπορούσαμε να γράψουμε απευθείας την εξίσωση ευθείας ΟΜ αφού θα είναι της μορφής $y = \lambda x$, διότι περνάει από το $O(0,0)$

(ii) Αφού ΟΚ το ύψος του τριγώνου ΟΒΓ τότε

$$OK \perp B\Gamma \Leftrightarrow \lambda_{OK} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{OK} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Αφού } \lambda_{B\Gamma} = \frac{y_\Gamma - y_B}{x_\Gamma - x_B} \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = \frac{6 - 0}{0 - (-3)} \Leftrightarrow \lambda_{B\Gamma} = 2$$

$$\text{Άρα η ευθεία ΟΚ έχει εξίσωση } \varepsilon_{OK} : y = -\frac{1}{2}x$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η ευθεία OA διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \tan \omega$, όπου $\omega = \frac{\pi}{3}$ άρα $\lambda = \sqrt{3}$ επομένως έχει εξίσωση $y = \sqrt{3}x$.

Άρα το σημείο A ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y = \sqrt{3}x$.

Το σημείο Γ βρίσκεται στο ημιάξονα Ox και η απόστασή του από το O είναι 4cm άρα έχει συντεταγμένες $\Gamma(4,0)$.

Το σημείο A έχει συντεταγμένες $A(x_A, \sqrt{3}x_A)$.

Αν A' η προβολή του A πάνω στον Ox τότε $A'(x_A, 0)$ άρα

$(AA') = \sqrt{3}x_A$, $(OA') = x_A$ και $(OA) = 4$ οπότε εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAA' προκύπτει

$$(OA)^2 = (AA')^2 + (OA')^2 \Leftrightarrow 16 = 3x_A^2 + x_A^2 \Leftrightarrow 4x_A^2 = 16 \Leftrightarrow x_A^2 = 4 \Leftrightarrow x_A = 2 \quad (x_A > 0)$$

Άρα $A(2, 2\sqrt{3})$

Το σημείο B έχει την ίδια τεταγμένη με το σημείο A ενώ οι τετμημένες τους διαφέρουν κατά 4cm , δηλαδή $x_B - x_A = 4 \Leftrightarrow x_B = 6$

Άρα $B(6, 2\sqrt{3})$

Γ2. Το K είναι κοινό μέσο των AG και OB άρα

$$\begin{cases} x_K = \frac{x_B + x_O}{2} \\ y_K = \frac{y_B + y_O}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \frac{6+0}{2} \\ y_K = \frac{2\sqrt{3}+0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = 3 \\ y_K = \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{οπότε } K(3, \sqrt{3})$$

Η πλευρά OG βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = 0$

Η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = 2\sqrt{3}$

Η πλευρά OA βρίσκεται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = \sqrt{3}x$

Η ευθεία BG είναι παράλληλη στην OA και διέρχεται από το $\Gamma(4,0)$ άρα έχει

$$\text{εξίσωση } y - 0 = \sqrt{3}(x - 4) \Leftrightarrow y = \sqrt{3}x - 4\sqrt{3}.$$

Γ3. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων αφού όλα τα σημεία που υπάρχουν είναι γνωστά .

$$\overline{OA} = (2, 2\sqrt{3}), \quad \overline{OB} = (6, 2\sqrt{3}), \quad \overline{BA} = (-4, 0), \quad \overline{KA} = (-1, \sqrt{3}), \quad \overline{KB} = (3, \sqrt{3})$$

i) $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = (2, 2\sqrt{3}) \cdot (6, 2\sqrt{3}) = 12 + 12 = 24$

ii) $\overline{OA} \cdot \overline{BA} = (2, 2\sqrt{3}) \cdot (-4, 0) = -8$

iii) $\overline{KA} \cdot \overline{KB} = (-1, \sqrt{3}) \cdot (3, \sqrt{3}) = 0$

iv) $\overline{AK} \cdot \overline{AO} = (1, -\sqrt{3}) \cdot (-2, -2\sqrt{3}) = -2 + 6 = 4$

Γ4. Η δοθείσα σχέση ισοδύναμα γίνεται :

$$\overline{GM} \cdot (\overline{GB} - \overline{KB}) + \overline{OA}^2 = \overline{KG} \cdot \overline{AM} \Leftrightarrow \overline{GM} \cdot (\overline{GB} + \overline{BK}) + \overline{OA}^2 = \overline{KG} \cdot \overline{AM}$$

$$\Leftrightarrow \overline{GM} \cdot \overline{GK} + \overline{OA}^2 = \overline{KG} \cdot \overline{AM} \Leftrightarrow \overline{GM} \cdot \overline{GK} - \overline{KG} \cdot \overline{AM} + \overline{OA}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{GM} \cdot \overline{GK} + \overline{GK} \cdot \overline{AM} + \overline{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow \overline{GK} (\overline{GM} + \overline{AM}) + \overline{OA}^2 = 0$$

Έχουμε $\overline{GK} = (-1, \sqrt{3}), \quad \overline{GM} = (x-4, y), \quad \overline{AM} = (x-2, y-2\sqrt{3})$

και $\overline{GM} + \overline{AM} = (x-4, y) + (x-2, y-2\sqrt{3}) = (2x-6, 2y-2\sqrt{3})$

ενώ $\overline{OA}^2 = (OA)^2 = 16$

Άρα $(-1, \sqrt{3}) \cdot (2x-6, 2y-2\sqrt{3}) + 16 = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 - 2\sqrt{3}y - 6 + 16 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}y = 2x - 16 \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$$

άρα τα σημεία $M(x, y)$ του επιπέδου που ικανοποιούν τη σχέση

$\overline{GM} \cdot (\overline{GB} - \overline{KB}) + \overline{OA}^2 = \overline{KG} \cdot \overline{AM}$ βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση

$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{8\sqrt{3}}{3}$ η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Η διαγώνιος ΑΓ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_{AG} = \frac{y_{\Gamma} - y_A}{x_{\Gamma} - x_A} = \frac{-2\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$

Επειδή $\lambda \cdot \lambda_{AG} = -\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = -1$ οι ευθείες τέμνονται κάθετα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} |\vec{\alpha}| & 1 \\ |\vec{\beta}| & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{\alpha}| - |\vec{\beta}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| \quad (1)$

Επίσης $|\vec{\alpha}| + 2|\vec{\beta}| = 5 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| + 4|\vec{\alpha}| = 5 \Leftrightarrow 5|\vec{\alpha}| = 5 \Leftrightarrow |\vec{\alpha}| = 1$

Άρα $|\vec{\beta}| = 2$

Επομένως $\vec{u} = (1,1)$ και $\vec{v} = (2,2)$, από τις συντεταγμένες των \vec{u}, \vec{v} προκύπτει

$\vec{v} = (2,2) = 2 \cdot (1,1) = 2\vec{u}$ άρα $\vec{u} \uparrow \uparrow \vec{v}$

Δ2. $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \perp (5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) \Leftrightarrow (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + 5\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2\vec{\beta}^2 = 0$
 $\Leftrightarrow 5|\vec{\alpha}|^2 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 2|\vec{\beta}|^2 = 0 \Leftrightarrow 5 + 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 8 = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$

Επομένως για την γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ έχουμε

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{1}{2} \text{ άρα } (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$$

Δ3. Υπολογίζουμε πρώτα τα $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|$, $|\vec{v} - \vec{u}|$

$|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|^2 = (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = 4 - 4 + 4 = 4$ άρα $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2$

$\vec{v} - \vec{u} = (2,2) - (1,1) = (1,1)$ άρα $|\vec{v} - \vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Άρα η εξίσωση $4 \cdot |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}|x = \sqrt{2} \cdot |\vec{v} - \vec{u}|$ γίνεται $8x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\vec{\alpha}(y \cdot \vec{\alpha} + 2 \cdot \vec{\beta})}{|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|} \cdot \vec{\alpha} = (1-y) \cdot \vec{\alpha} \Leftrightarrow \frac{y\vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{1+2} \cdot \vec{\alpha} = (1-y) \cdot \vec{\alpha} \Leftrightarrow \left(\frac{y+2}{3}\right) \cdot \vec{\alpha} = (1-y) \cdot \vec{\alpha}$$

Από την τελευταία ισότητα αφού $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ προκύπτει

$$\frac{y+2}{3} = 1-y \Leftrightarrow y+2 = 3-3y \Leftrightarrow 4y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

Δ4. Αφού $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με τον Ox τότε $\vec{\alpha} = (x, 0), x > 0$

Ισχύει $|\vec{\alpha}| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 0^2} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ άρα $\vec{\alpha} = (1, 0)$

Η γωνία που σχηματίζουν τα $\vec{\alpha}, \vec{u}$ είναι

$$\cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{u}}) = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{u}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{u}|} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{u}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{u}}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα } (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Οπότε } (\widehat{\vec{\beta}, \vec{u}}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$