

ΤΑΞΗ: Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 9 Ιανουαρίου 2021
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = \lambda_{\vec{a}}$, $\lambda_2 = \lambda_{\vec{b}}$ αντίστοιχα και $\vec{a}, \vec{b} \notin y'y$.

Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$.

8 Μονάδες

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό: «Για δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου \vec{a}, \vec{b} ισχύει ότι $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ »

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ αν είναι ψευδής.

2 Μονάδες

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

2 Μονάδες

Α3. Τι ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b} ;

3 Μονάδες

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό** αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$.
2. Αν \vec{a} διάνυσμα του επιπέδου, $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι:
 $\lambda \vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{a} = \vec{0}$.
3. Ως **συντελεστή διεύθυνσης** μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα $x'x$.
4. Το $|\vec{a}|$ ενός διανύσματος $\vec{a} = (x, y)$ με $x, y \in \mathbb{R}$ του καρτεσιανού επιπέδου ισούται πάντα με $x^2 + y^2$.
5. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $x_1, y_1 \in \mathbb{R}$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους είναι $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$.

10 Μονάδες

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(-2, 4)$.

B1. Να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής A από την οποία διέρχονται οι ευθείες $(\varepsilon_1) : 2x + y - 5 = 0$ και $(\varepsilon_2) : x - 4y + 2 = 0$.

8 Μονάδες

B2. Αν η πλευρά $B\Gamma$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta) : 3x - y + 2021 = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η $B\Gamma$ είναι η $y = 3x + 10$.

8 Μονάδες

B3. Αν $A(2, 1)$ και το ύψος $B\Delta$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $x + y - 2 = 0$, να βρεθούν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ .

9 Μονάδες

ΘΕΜΑ Γ

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία είναι $|\vec{\alpha}|=1$, $|\vec{\beta}|=5$, $\eta\mu(\overset{\wedge}{\vec{\alpha}}, \overset{\wedge}{\vec{\beta}}) = \frac{3}{5}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 4$ ή $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -4$.

9 Μονάδες

Αν η γωνία $(\overset{\wedge}{\vec{\alpha}}, \overset{\wedge}{\vec{\beta}})$ είναι οξεία τότε :

Γ2. Να υπολογίσετε το $|\vec{5\alpha} - \vec{\beta}|$.

8 Μονάδες

Γ3. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό x αν το διάνυσμα

$$\vec{v} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \vec{\alpha} - x \vec{\beta} \text{ είναι κάθετο στο } \vec{\beta}.$$

8 Μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $B(-2, 3)$ και $\Gamma(0, -3)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκάθετης ευθείας μ του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ είναι $y = \frac{1}{3}(x+1)$.

7 Μονάδες

Δ2. Να βρείτε το σημείο $A(x_A, y_A)$, με $x_A > 0$, του επιπέδου Oxy για το οποίο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές με $\hat{A} = 90^\circ$.

9 Μονάδες

Δ3. Αν M είναι οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου Oxy , να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{MA}^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{M\Gamma}.$$

9 Μονάδες