



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Τρίτη 7 Ιανουαρίου 2020

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 63

Α2.

ΣΤΗΛΗ Α ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΤΗΛΗ Β ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
$\alpha$	3
$\beta$	8
$\gamma$	2
$\delta$	5
$\varepsilon$	7
$\sigma\tau$	4
$\zeta$	6
$\eta$	1

Α3.

- α. Λάθος
- β. Σωστό
- γ. Σωστό
- δ. Λάθος
- ε. Λάθος

**ΘΕΜΑ Β****B1.** Έχουμε:

$$A = \sqrt{4 - 4x + x^2} + \sqrt{y^2 - 8y + 16} \Leftrightarrow$$

$$A = \sqrt{(2 - x)^2} + \sqrt{(y - 4)^2} \Leftrightarrow$$

$$A = |2 - x| + |y - 4|$$

**B2****i)** Γνωρίζουμε ότι:

- Αφού  $x < 1 < 2$  τότε θα είναι  $x < 2 \Leftrightarrow 0 < 2 - x$  οπότε  $|2 - x| = 2 - x$
- Αφού  $y < 4 \Leftrightarrow y - 4 < 0$  οπότε  $|y - 4| = -y + 4$

Έτσι η παράσταση  $A$  γίνεται,

$$A = |2 - x| + |y - 4| = 2 - x + (-y + 4) = 2 - x - y + 4 = -x - y + 6$$

**ii)** Από την ανισότητα  $-1 < x < 1$  διαδοχικά έχουμε :

$$\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ -1 < x < 1 \Leftrightarrow \end{array}$$

$$1 > -x > -1 \Leftrightarrow$$

$$-1 < -x < 1 \quad (1)$$

Από την ανισότητα  $-2 < y < 4$  διαδοχικά έχουμε :

$$\begin{array}{l} \cdot(-1) \\ -2 < y < 4 \Leftrightarrow \end{array}$$

$$2 > -y > -4 \Leftrightarrow$$

$$-4 < -y < 2 \quad (2)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες (1) και (2), που έχουν την ίδια φορά, και έχουμε:

$$-5 < -x - y < 3 \Leftrightarrow$$

$$-5 + 6 < -x - y + 6 < 3 + 6 \Leftrightarrow$$

$$1 < A < 9$$

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1 Έχουμε:

$$\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{4 - \sqrt{14}} \cdot \sqrt{4 + \sqrt{14}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(4 - \sqrt{14}) \cdot (4 + \sqrt{14})} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{4^2 - (\sqrt{14})^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{16 - 14} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$\beta = \sqrt{2} \cdot \sqrt[6]{2^7} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{7}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} =$$

$$2^{\frac{1}{2} + \frac{7}{6} + \frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6} + \frac{7}{6} + \frac{2}{6}} = 2^{\frac{12}{6}} = 2^2 = 4$$

Γ2. Αντικαθιστούμε στην παράσταση γ όπου α=2 και β=4 και έχουμε :

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4 - \sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4 + \sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} + \frac{2}{2 + \sqrt{2}} =$$

$$\frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} + \frac{2(2 - \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = \frac{2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2}{2^2 - (\sqrt{2})^2} + \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2^2 - (\sqrt{2})^2} =$$

$$\frac{2\sqrt{2} + 2}{4 - 2} + \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4 - 2} = \frac{2\sqrt{2} + 2 + 4 - 2\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Γ3. Αντικαθιστούμε στην ισότητα όπου γ=3, α=2 και β=4 και έχουμε :

$$x^2 + y^2 + 4 + 6 = (3 + 3)x - 2y \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + 10 = 6x - 2y \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + 10 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x - 3 = 0 \text{ και } y + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 3 \text{ και } y = -1$$

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned}\lambda^2(\lambda x - 1) &= 8x - 2\lambda \Leftrightarrow \lambda^3 x - \lambda^2 = 8x - 2\lambda \Leftrightarrow \\ \lambda^3 x - 8x &= \lambda^2 - 2\lambda \Leftrightarrow (\lambda^3 - 8)x = \lambda(\lambda - 2) \quad (1)\end{aligned}$$

Δ2. Για να είναι η παραπάνω εξίσωση ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών πρέπει

$$\begin{cases} \lambda^3 - 8 = 0 \\ \text{και} \\ \lambda(\lambda - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^3 = 8 \\ \text{και} \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt[3]{8} \\ \text{και} \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \text{και} \\ \lambda = 0 \text{ ή } \lambda = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2$$

Για  $\lambda=2$  η (1) γίνεται  $(2^3 - 8)x = 2(2 - 2) \Leftrightarrow 0x = 0$  και είναι ταυτότητα.

Δ3. Για  $\lambda = 2$  η εξίσωση γίνεται :

$$|x - 4| = x - 2$$

Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση θα πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό οπότε :

$$x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$$

Για  $x \geq 2$  έχουμε:

$$|x - 4| = x - 2 \Leftrightarrow$$

$$x - 4 = x - 2 \quad \text{ή} \quad x - 4 = -x + 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}0x = 2 \text{ αδύνατη,} \quad 2x = 6 \Leftrightarrow \\ x = 3\end{aligned}$$

Η  $x=3$  είναι λύση της εξίσωσης γιατί ικανοποιεί τον περιορισμό  $x \geq 2$

Δ4.

i) Έχουμε:

$$\lambda > 2 \Leftrightarrow \lambda^3 > 2^3 \Leftrightarrow \lambda^3 > 8$$

Αφού  $\lambda > 2$  τότε:

$$\lambda > 0 \text{ και } \lambda - 2 > 0$$

Άρα  $\lambda(\lambda - 2) > 0$  ως γινόμενο ομόσημων παραστάσεων .

ii) Από τις ιδιότητες των απόλυτων τιμών γνωρίζουμε ότι:

$|x + a| \leq |x| + |a|$  με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν οι αριθμοί  $x$  και  $a$  είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι μηδέν.

Είναι  $(\lambda^3 - 8)x = \lambda(\lambda - 2) \Rightarrow x = \frac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda^3 - 8} > 0$  από το προηγούμενο ερώτημα.

Αφού  $x > 0$  τότε για να ισχύει η ισότητα  $|x + a| = |x| + |a|$  θα πρέπει είτε  $a = 0$  είτε  $a > 0$  άρα πρέπει  $a \geq 0$