ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 27 Απριλίου 2024
Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σελίδα 68 σχολικού βιβλίου.

Α2 **α)** Λάθος
β) Λάθος
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα OAM και OBM:

- OM (κοινή πλευρά)
- $OA = OB$ (υπόθεση)
- $A\hat{O}M = B\hat{O}M$ ($O\delta$ διχοτόμος)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $A\Gamma M$ και $B\Delta M$:

- $A\hat{M}\Gamma = B\hat{M}\Delta$ (ως κατακορυφήν γωνίες)
- $AM = BM$ (από το ερώτημα Β1)
- $M\hat{A}\Gamma = M\hat{B}\Delta$ (ως παραπληρωματικές των ίσων γωνιών $O\hat{A}M$ και $O\hat{B}M$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΓΠΓ τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε $A\Gamma = B\Delta$.

Β3. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΜΓ$ και $ΟΜΔ$:

- $ΟΜ$ (κοινή πλευρά)
- $ΜΓ = ΜΔ$ (από το ερώτημα Β2)
- $ΟΓ = ΟΔ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $\begin{array}{r} ΟΑ = ΟΒ \\ +\ ΑΓ = ΒΔ \\ \hline ΟΓ = ΟΔ \end{array}$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

<u>2η λύση:</u>

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΜΓ$ και $ΟΜΔ$:

- $ΟΜ$ (κοινή πλευρά)
- $Γ\hat{Ο}Μ = Δ\hat{Ο}Μ$ ($Οδ$ διχοτόμος)
- $ΟΓ = ΟΔ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $\begin{array}{r} ΟΑ = ΟΒ \\ +\ ΑΓ = ΒΔ \\ \hline ΟΓ = ΟΔ \end{array}$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

Β4. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΓ$:

- $ΟΑ = ΟΒ$ (υπόθεση)
- $Χ\hat{Ο}Υ$ (κοινή γωνία)
- $ΟΓ = ΟΔ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $\begin{array}{r} ΟΑ = ΟΒ \\ +\ ΑΓ = ΒΔ \\ \hline ΟΓ = ΟΔ \end{array}$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΓΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

2^{η} λύση:

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $ΟΑΔ$ και $ΟΒΓ$:

- $ΟΑ = ΟΒ$ (υπόθεση)
- $ΑΔ = ΒΓ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $\begin{array}{r} ΑΜ = ΒΜ \\ + \ \ ΜΔ = ΜΓ \\ \hline ΑΔ = ΒΓ \end{array}$)
- $ΟΔ = ΟΓ$ (ως άθροισμα ίσων πλευρών $\begin{array}{r} ΟΒ = ΟΑ \\ + \ \ ΒΔ = ΑΓ \\ \hline ΟΔ = ΟΓ \end{array}$)

Άρα από το κριτήριο ισότητας ΠΠΠ τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Το τρίγωνο $ΕΒΖ$ είναι ορθογώνιο και επειδή $\hat{Β} = 60°$ έχουμε ότι

$Ε\hat{Ζ}Β = 30°$, άρα $ΒΕ = \frac{ΒΖ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ \Leftrightarrow ΒΕ = ΒΓ$.

Επίσης το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε $ΑΔ = ΒΓ$.

Άρα $\left.\begin{array}{l} ΒΕ = ΒΓ \\ ΑΔ = ΒΓ \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΒΕ = ΑΔ$.

Γ2. Το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο, θα ισχύει $ΑΒ // ΔΓ$ οπότε $ΑΕ // ΔΓ$ συνεπώς το $ΑΕΓΔ$ είναι τραπέζιο.

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΕΒΖ$ η $ΕΓ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $ΕΓ = \frac{ΒΖ}{2} = \frac{2ΒΓ}{2} = ΒΓ \Leftrightarrow ΕΓ = ΒΓ$, επίσης το $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο οπότε θα ισχύει $ΑΔ = ΒΓ$.

Το $\left.\begin{array}{l} ΕΓ = ΒΓ \\ ΑΔ = ΒΓ \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΕΓ = ΑΔ$ συνεπώς το $ΑΕΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Γ3. i) Στο τρίγωνο $ΜΒΖ$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{lll} Ε & \textit{μέσο} & ΜΒ \\ Γ & \textit{μέσο} & ΒΖ \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΕΓ // ΜΖ$$ γιατί ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών.

ii) Επίσης $ΕΓ = \dfrac{ΜΖ}{2}$, από το προηγούμενο ερώτημα επειδή ενώνει τα μέσα

δύο πλευρών, συνεπώς: $ΕΓ = \dfrac{ΜΖ}{2} \Leftrightarrow ΜΖ = 2ΕΓ$

Όμως από το ερώτημα Γ2 έχουμε $ΕΓ = ΑΔ$ συνεπώς $ΜΖ = 2ΑΔ$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ορθογώνιο με $\hat{Γ} = 30°$ συνεπώς $ΑΒ = \dfrac{ΒΓ}{2}$.

Έχουμε ακόμα $\left.\begin{array}{l} ΑΔ \perp ΒΓ \\ ΑΔ // Γx \end{array}\right\} \Leftrightarrow Γx \perp ΒΓ$ συνεπώς $Ζ\hat{Γ}Β = 90°$.

Επίσης στο τρίγωνο $ΖΓΒ$ επειδή $\hat{Β} = 60°$, έχουμε $\hat{Ζ} = 30°$ οπότε

$ΒΓ = \dfrac{ΒΖ}{2}$, άρα $ΑΒ = \dfrac{ΒΓ}{2} = \dfrac{\frac{ΒΖ}{2}}{2} = \dfrac{ΒΖ}{4}$.

Δ2. Στο τρίγωνο $ΖΓΒ$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{lll} Κ & \textit{μέσο} & ΖΓ \\ Μ & \textit{μέσο} & ΒΓ \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΚΜ = \frac{ΒΖ}{2}$$ επειδή ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών.

Επίσης από το Δ1 ερώτημα έχουμε $ΒΓ = \dfrac{ΒΖ}{2}$,

οπότε $\left.\begin{array}{l} ΚΜ = \dfrac{ΒΖ}{2} \\ ΒΓ = \dfrac{ΒΖ}{2} \end{array}\right\} \Leftrightarrow ΚΜ = ΒΓ$.

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο $ΖΓΑ$ είναι ορθογώνιο με $\hat{Ζ} = 30°$ άρα

$ΑΓ = \dfrac{ΖΓ}{2} = \dfrac{2ΚΓ}{2} = ΚΓ \Leftrightarrow ΑΓ = ΚΓ$.

Δ3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η AM είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα άρα $AM = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AM = MB$, επίσης στο ίδιο τρίγωνο $\hat{\Gamma} = 30°$ συνεπώς $AB = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow AB = MB$ συνεπώς στο τρίγωνο AMB ισχύει: $AM = MB = AB$ άρα είναι ισόπλευρο, οπότε η $A\Delta$ ως ύψος είναι και διάμεσος άρα $M\Delta = \Delta B$.

Δ4. Στο τρίγωνο $Z\Gamma B$ έχουμε:

$$\left.\begin{array}{lll} K & \textit{μέσο} & Z\Gamma \\ M & \textit{μέσο} & B\Gamma \end{array}\right\} \Leftrightarrow KM \,//\, ZB$$ επειδή ενώνει τα μέσα των δυο πλευρών,

άρα και $ME \,//\, AB$.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $M\Delta E$ και $A\Delta B$:

- $M\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}B = 90°$
- $M\Delta = \Delta B$ (από Δ3 ερώτημα)
- $E\hat{M}\Delta = A\hat{B}\Delta$ (ως εντός εναλλάξ)

Από το κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων (μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία) τα τρίγωνα είναι ίσα συνεπώς $ME = AB$, οπότε στο τετράπλευρο $MEBA$ δύο πλευρές είναι ίσες και παράλληλες άρα είναι παραλληλόγραμμο και επειδή οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.