



ΤΑΞΗ: Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

Ημερομηνία: Σάββατο 7 Ιανουαρίου 2023

Διάρκεια Εξέτασης: 2 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΑΑ1. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α και β ισχύει ότι:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Μονάδες 7

Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

Μονάδες 2

Α2. Έστω x ένας πραγματικός αριθμός.

Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της στήλης Α με την ισοδύναμή της από την στήλη Β μεταφέροντας στο τετράδιό σας τον πίνακα 1 σωστά συμπληρωμένο.

ΣΤΗΛΗ Α Σχέση με απόλυτες τιμές	ΣΤΗΛΗ Β Σχέση με απόσταση
1. $ x - 1 \geq 2$	α. $d(x, -2) \leq 1$
2. $ x + 1 \geq 2$	β. $d(x, 2) \leq 1$
3. $ x - 2 \leq 1$	γ. $d(x, -1) \geq 2$
	δ. $d(x, 1) \geq 2$

Πίνακας 1		
1	2	3

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$

β. Αν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

γ. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$

δ. Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\beta \cdot \gamma \cdot \delta \neq 0$ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

ε. Ισχύει ότι: $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

B1. Να γράψετε την παράσταση $\alpha = -|\pi - 3| + |\sqrt{8} - \pi| - |4 - \sqrt{8}|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

Μονάδες 8

B2. Να λύσετε την εξίσωση $\beta^3 - 64 = 0$

Μονάδες 5

Για $\alpha = -1$ και $\beta = 4$.

B3. Αν $x \in (\alpha, \beta)$ να δείξετε ότι η παράσταση $A = |x + 1| + |x - 4|$ είναι ανεξάρτητη του x .

Μονάδες 7

B4. Για $A = 5$ να λυθεί η εξίσωση: $|x - A| = 10$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = 2(2x-\lambda)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-2)(\lambda+2)x = \lambda(\lambda-2) \quad (1)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ3. Αν $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση $\left| |x-\lambda| - \lambda^2 \right| = |\lambda - |\lambda-x||$

Μονάδες 8

Γ4. Αν $x_0 = \frac{\lambda}{\lambda+2}$ η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) για κάθε $\lambda \neq 2$ και

$\lambda \neq -2$ να βρείτε το λ ώστε $x_0 = \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{2-\sqrt{2}}$

Μονάδες 6**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{3\alpha}{\alpha^2-1} = \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha-3}{\alpha-1}$

β) $\sqrt{\beta^2-8\beta+16} + |\beta^2-16| = 0$

Μονάδες 8

Δ2. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων γ και δ

$$\alpha) \gamma = \frac{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{16}}{2 \cdot \sqrt[12]{2}}$$

$$\beta) \delta = \left(\frac{\sqrt{27} + \sqrt{18}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right)^2$$

Μονάδες 8

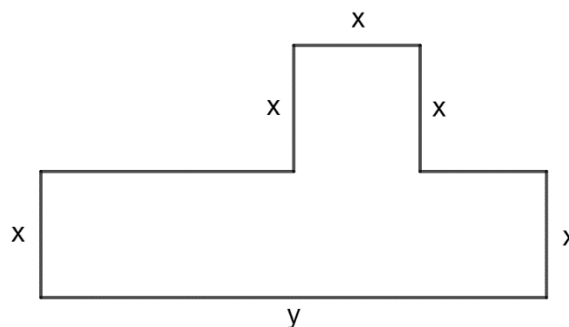
Για $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$ και $\delta = 9$

Δ3. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει ότι: $\alpha \leq x \leq \beta$ και

$$\gamma \leq y \leq \delta$$

i) να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν E του παρακάτω σχήματος ως συνάρτηση των x και y

Μονάδες 4



ii) Αν $\Pi = 4x + 2y$ και $E = x^2 + xy$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η περίμετρος και το εμβαδόν.

Μονάδες 5