ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 1° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

A_1: Έστω δύο συναρτήσεις **f , g** ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν ισχύουν :

- οι **f , g** είναι συνεχείς στο Δ
- $f\,'(x) = g\,'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

να αποδείξετε ότι υπάρχει σταθερά **c** τέτοια ώστε για κάθε x του διαστήματος Δ να ισχύει : $f(x) = g(x) + c$

(Μονάδες 5)

A_2: Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής

(Μονάδες 3)

A_3: Πότε θα λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο x_0 ε A **τοπικό ελάχιστο**;

(Μονάδες 3)

A_4: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
« **Όλα τα κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων αυτής** »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

(Μονάδες 1+3=4)

A_5: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
« **Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στην ένωση Α των διαστημάτων Δ_1 και Δ_2 και ισχύει f΄(x)=0 σε κάθε εσωτερικό σημείο του Α τότε η f είναι σταθερή στο Α** »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

(Μονάδες 1+3=4)

A_6: Αν για την συνάρτηση f ορισμένη στο R ισχύει : $f\,'(x) = x^2\left(x-1\right)^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι **λανθασμένοι ;**

α) Τα κρίσιμα σημεία της f είναι μόνο τα **x=0 και x=1**

β) Η f έχει το πολύ τρείς ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους

γ) Η f παρουσιάζει μέγιστο στο **x_0=1**

δ) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο **x_0=1**

ε) Η εξίσωση **f(x)=0** έχει δύο αρνητικές ρίζες

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \begin{cases} x\ln x \;, & x > 0 \\ 0 \;, & x = 0 \end{cases}$ και $g(x) = e^x + \lambda$

B_1: Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής

(Μονάδες 4)

B_2: Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

(Μονάδες 5)

Β₃: Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και να λύσετε την εξίσωση $\frac{3\kappa}{x} = \ln x$, $x > 0$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του **κ**

(Μονάδες 5)

Β₄: Να βρείτε τις τιμές του **λ** για τις οποίες η εφαπτομένη της $\mathbf{C_f}$ στο $\mathbf{x_0 = 1}$ εφάπτεται της $\mathbf{C_g}$

(Μονάδες 6)

Β₅: Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\left(e^x - 1\right)\eta\mu x}$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(1)=\frac{1}{e}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$x\cdot f'(x) - e^{-x} = -x\cdot f(x)$, $x > 0$

Γ₁: Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1+\ln x}{e^x}$, $x > 0$

(Μονάδες 6)

Γ₂: Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το σύνολο τιμών.

(Μονάδες 6)

Γ₃: Να δείξετε ότι η εξίσωση $e\cdot f\left(e^{3f(x)-1}\right)-1=0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες

(Μονάδες 6)

Γ₄: Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ_3 με $x_1 < x_2$ να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε $2\xi\left(1-3f(\xi)\right)=3\left(\xi^2+1\right)f'(\xi)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :

$$\mathbf{f^3(x) + \alpha f^2(x) + \beta f(x) = x^3 + 5x^2 + 10x + 5}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$ και $\alpha^2 < 2\beta$

Δ₁: Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα

(Μονάδες 5)

Δ₂: Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

(Μονάδες 6)

Δ₃: Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στο διάστημα (-1,0)

(Μονάδες 7)

Δ₄: Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $f(\ln x)=f(\lambda x)$ έχει ακριβώς δύο πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 2° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

Α$_1$: Αν $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ *και* $g:\mathrm{B}\to\mathbb{R}$ τότε τι ονομάζουμε σύνθεση της f *με την* g $(g\circ f)$;
Ποια είναι η συνθήκη ώστε να ορίζεται η σύνθεση των συναρτήσεων f *και* g;

(Μονάδες 5)

Α$_2$: Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του.

(Μονάδες 3)

Α$_3$: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{x}$.

(Μονάδες 4)

Α$_4$: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
« **Αν** $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=+\infty$ **τότε είναι είτε** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$ *είτε* $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

(Μονάδες 1+3=4)

Α$_5$: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :
« **Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2** $\subseteq D_f$ **τότε η συνάρτηση** f **θα είναι υποχρεωτικά γνησίως φθίνουσα και στο σύνολο** $\Delta=\Delta_1\cup\Delta_2$ »

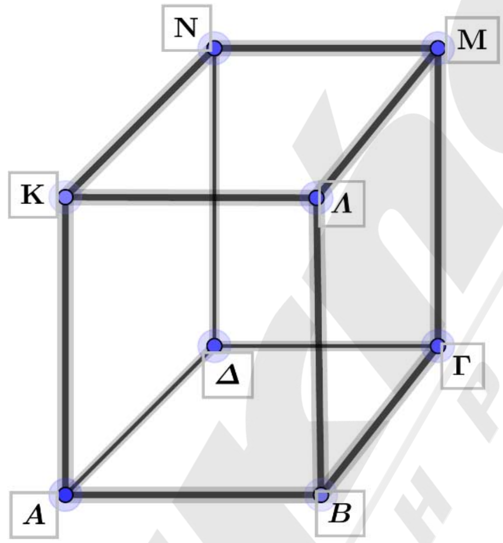
α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.
β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

(Μονάδες 1+3=4)

Α$_6$: Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με :
$f(\alpha)=0$ *και* $f'(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in(\alpha,\beta)$
Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς γράφοντας στο τετράδιό σας το **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

α) Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.
β) Η συνάρτηση f είναι «1-1» .
γ) Ισχύει $f(x)\neq 0$ *για κάθε* $x\in(\alpha,\beta)$.
δ) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Ενδιαμέσων Τιμών για την συνάρτηση f
ε) Η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο σε σημείο $x_0\in(\alpha,\beta)$

ΘΕΜΑ Β



Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς x cm είναι ανοικτό από πάνω. Επίσης το εμβαδόν της συνολικής (εξωτερικής) επιφάνειας του κουτιού είναι $64\ cm^2$.

Β$_1$: Να αποδείξετε ότι η χωρητικότητα V του κουτιού δίνεται από τη συνάρτηση:

$$V(x)=\frac{64x-x^3}{4} \quad , \quad \mu\varepsilon\ x\in(0,8)$$

(Μονάδες 6)

Β$_2$: Να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει το κουτί ώστε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα.

(Μονάδες 6)

Β$_3$: Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης V που διέρχονται από το σημείο $\Sigma\left(4,\alpha\right)$ όπου $\alpha\in\left(48,64\right)$

(Μονάδες 7)

Β$_4$: Αν το x αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της διαγωνίου ΒΜ τη χρονική στιγμή που είναι $x=4cm$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \left|x^2-2x\right| & , \ x<1 \\ \alpha & , \ x=1 \\ \beta x-\dfrac{\ln x}{x} & , \ x>1 \end{cases}$

Γ$_1$: Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=1$

(Μονάδες 5)

Γ$_2$: Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f

(Μονάδες 5)

Γ$_3$: Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

(Μονάδες 5)

Γ$_4$: Να αποδείξετε ότι :

α) $\ln x<\sqrt{x}$, *για κάθε* $x>0$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

(Μονάδες 2+3=5)

Γ$_5$: Να βρείτε :

α) το σύνολο τιμών της f

β) το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, *για κάθε* $\lambda\in\mathbb{R}$

(Μονάδες 2+3=5)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία γνωρίζουμε ότι :

- $x\cdot f'(x)=f(x)+e^{\frac{1}{x}}$, *για κάθε* $x<0$
- $f'(x)=e^{-f(x)}$, *για κάθε* $x\geq 0$

Δ1: Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\begin{cases} x\left(1-e^{\frac{1}{x}}\right) & , \quad x<0 \\ \ln(x+1) & , \quad x\geq 0 \end{cases}$

(Μονάδες 6)

Δ2: **α)** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}

(Μονάδες 3+4=7)

Δ3: Να λύσετε την ανίσωση : $f\left(\eta\mu^2 x\right)\geq f(x)$, $x\in[0,2\pi]$

(Μονάδες 6)

Δ4: Να αποδείξετε ότι : $f\left((e^x-1)\ln(x+1)\right)>f\left(x^2\right)$, *για* $x>0$

(Μονάδες 6)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 3° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

A_1: Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών

(Μονάδες 5)

A_2: Να διατυπώσετε το θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής

(Μονάδες 4)

A_3: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^\nu$, *όπου* $\nu \in \mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$ δηλαδή $\left(x^\nu\right)'=\nu x^{\nu-1}$

(Μονάδες 4)

A_4: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό : « Αν για τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f'(x)>g'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

(Μονάδες 1+3=4)

A_5: Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό :

« Υπάρχει σημείο $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε να ισχύει $e^{x_0}<x_0+1$ »

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α** αν είναι αληθής , ή το γράμμα **Ψ** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α

(Μονάδες 1+3=4)

A_6: Αν $f(x)=1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$ τότε ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι λανθασμένοι;

α) Η f είναι συνεχής στο $x_0=0$

β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0=0$

γ) Το μηδέν είναι κρίσιμο σημείο της f

δ) Η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=0$

ε) Ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[-1,1]$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}-\ln x$, $x>0$

B_1: Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 7)

B_2: Αν για τους θετικούς αριθμούς α , β ισχύει $\alpha\cdot\beta=e^{2\sqrt{\alpha}}$ τότε να αποδείξετε ότι $\beta\ge e^2$

(Μονάδες 5)

B_3: Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x-\ln x\right)=2$

(Μονάδες 6)

B_4: Έστω F μια αρχική της f στο διάστημα $\left(0,+\infty\right)$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ *ισχύει* $(x+1)\cdot F(x)<F\left(x^2\right)+x\cdot F(1)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\quad,\quad f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \textit{και}\quad f(x)+f''(x)=0\quad \textit{για κάθε } x\in(0,\pi)$$

Γ₁: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+f(x)\cdot\eta\mu x$ είναι σταθερή.

(Μονάδες 5)

Γ₂: Να αποδείξετε ότι $f(x)=\eta\mu x$, *για κάθε* $x\in(0,\pi)$ και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 5)

Γ₃: Θεωρούμε σημείο $\mathrm{M}(x,f(x))$ της γραφικής παράστασης της f και έστω Ν η προβολή του Μ στον άξονα x΄x. Έστω επίσης Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ όπου Ο η αρχή των αξόνων.

i) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}(x)=\dfrac{x\cdot\eta\mu x}{2}$ *για κάθε* $x\in(0,\pi)$ και να ορίσετε την $\mathrm{E}'(x)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\mathrm{E}'(x)=0$ έχει μοναδική λύση x_0 η οποία ανήκει στο $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}\right)$

iii) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του εμβαδού Ε ισούται με $-\dfrac{\eta\mu x_0\cdot\varepsilon\varphi x_0}{2}$ *όπου* x_0 η λύση της εξίσωσης $\mathrm{E}'(x)=0$.

(Μονάδες 5+5+5=15)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν :

- $f'(x)-f(x)=e^x$ και $f(0)=0$
- $g(x)=e^x-3$
- $\ln\left[h^2(x)+1\right]+e^{h(x)}=(x-2)\cdot e^x+3x+2020$

Δ₁: Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=x\cdot e^x$

(Μονάδες 6)

Δ₂: Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι « πάνω » από τη γραφική παράσταση της g

(Μονάδες 7)

Δ₃: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h δεν έχει κανένα κρίσιμο σημείο

(Μονάδες 6)

Δ₄: Αν υπάρχουν $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ και ισχύει: $h'(x_1)+h'(x_2)=0$ να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της h στα σημεία $\mathrm{A}(x_1,f(x_1))$ *και* $\mathrm{B}(x_2,f(x_2))$ σχηματίζουν με τον άξονα x΄x ισοσκελές τρίγωνο.

(Μονάδες 6)

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ 4° ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΘΕΜΑ Α

A$_1$: Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 7)

A$_2$: Πότε η ευθεία $\psi = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

(Μονάδες 4)

A$_3$: Τι ονομάζουμε αρχική ή παράγουσα συνάρτηση F της f ;

(Μονάδες 4)

A$_4$: Να χαρακτηρίσετε με Σωστό –Λάθος τις προτάσεις που ακολουθούν :

α) Ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 1$

β) Ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta f(t)dt = F(\beta) - F(\alpha)$

γ) Ισχύει ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$ όπου f' , g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$

δ) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ είναι όλο το $\mathbb{R}$

ε) Αν $f(x) = \ln|x| \quad \forall x \neq 0$, *τότε* $f'(x) = \dfrac{1}{|x|} \quad \forall x \neq 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1} \quad x \in \mathbb{R}$

B$_1$: Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα , τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

(Μονάδες 6)

B$_2$: Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή , τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης .

(Μονάδες 8)

B$_3$: Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης παράστασης της f .

(Μονάδες 6)

B$_4$: Με βάση τα παραπάνω να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x\ln x-x}$ $x>0$

Γ$_1$: Να δείξετε ότι ισχύει : $f'(x)=\ln x\cdot f(x)$

(Μονάδες 4)

Γ$_2$: Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία ,τα ακρότατα και να δείξετε ότι η f είναι κυρτή.

(Μονάδες 7)

Γ$_3$: Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $x^x e^{-x}=\kappa$ $x>0$ για τις διάφορες τιμές κ>0

(Μονάδες 8)

Γ$_4$: Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \ln x\cdot f(x)dx=\frac{e-1}{e}$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και : $\int_0^1\left(x^2 f''(x)+2xf'(x)\right)dx=2$

Επίσης η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M\left(1,f(1)\right)$ διέρχεται από το σημείο $A\left(4,9\right)$

Δ$_1$: Να αποδείξετε ότι $f'(1)=2$ *και* $f(1)=3$

(Μονάδες 9)

Δ$_2$: Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx$

(Μονάδες 8)

Δ$_3$: Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ *ώστε* $f'(x_0)=2$

(Μονάδες 4)

Δ$_4$: Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ *ώστε* $f''(\xi)=0$

(Μονάδες 4