ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση φ(x) = xlnx, x > 0 και έστω $\alpha = \lim_{x\to 0} \varphi(x)$. Δίνεται ακόμη η τρεις φορές παραγωγίσιμη

στο [0. +∞) συνάρτηση g με θετικές τιμές στο διάστημα (0,1) για την οποία ισχύουν $\int_0^2 g(x)\,dx < 0$, g(α) = 0 και g'(0) = 0. Δίνεται ακόμη συνάρτηση $f : [\alpha, +\infty) \to R$ με

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ex^2}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt & , x > \alpha \\ 0 & , x = \alpha \end{cases}$$

α) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια η συνάρτηση f
β) Να δειχθεί ότι υπάρχει ρ ∈ (1,2) τέτοιο ώστε f (ρ) = 0
γ) Να δειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0
δ) Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε f '(ξ) = 0

2ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο A = (0, +∞) με την ιδιότητα

$$f(x) = \frac{1}{x} + \int_1^x \frac{t \cdot f(t)}{x^2}\,dt \quad , x > 0$$

α) Αποδείξτε ότι η f παραγωγίζεται στο A = (0, +∞)
β) Να βρεθεί ο τύπος της f
γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f
ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Αρχικά

$$\alpha = \lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}(x\ln x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$ οπότε g(0)=0 και

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{ex^2}\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση στο ως γινόμενο παραγωγίσιμων με

$$f'(x) = -\frac{2}{ex^3}\int_0^x g(t)dt + \frac{g(x)}{ex^2}$$

οπότε και συνεχής. Για τη συνέχεια στο 0 έχουμε f(0)=0 και

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{ex^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)'}{(ex^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{2ex}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(g(x))'}{(2ex)'} = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2e} = \frac{g'(0)}{2e} = 0$$

οπότε f συνεχής στο 0. Άρα f συνεχής στο $[0,+\infty)$.
g τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$
οπότε g' συνεχής στο 0
β) η $f(x) = \frac{1}{ex^2}\int_0^x g(t)\,dt$ είναι συνεχής στο [1,2]

Επίσης $f(1) \cdot f(2) = \frac{1}{e}\int_0^1 g(t)\,dt \cdot \frac{1}{4e}\int_0^2 g(t)\,dt < 0$ αφού

$\int_0^2 g(t)\,dt < 0$ και $\int_0^1 g(t)\,dt > 0$ επειδή g(x) > 0 στο (0,1)

και g συνεχής στο [0,1]. Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ρ ∈ (1,2) τέτοιο ώστε f(ρ) = 0
γ) Έχουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x g(t)\,dt}{ex^3} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{3ex^2}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{6ex} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{g''(x)}{6e} = \frac{g''(0)}{6e} \in R$$

, άρα f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = \frac{g''(0)}{6e}$

δ) Στο διάστημα [0.ρ] ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f οπότε υπάρχει ξ ∈ (0, ρ) άρα και ξ ∈ (0, +∞) τέτοιο ώστε f '(ξ) = 0

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α)
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot\int_1^x t \cdot f(t)\,dt,\ x > 0$$

είναι f(t), t συνεχείς συναρτήσεις άρα $\int_1^x t \cdot f(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞), $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$ παραγωγίσιμες άρα και f παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγισίμων.
β)
$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\cdot\int_1^x t \cdot f(t)\,dt \Leftrightarrow x^2 f(x) = x + \int_1^x t \cdot f(t)\,dt$$

Άρα $(x^2)' \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) = 1 + x \cdot f(x) \Leftrightarrow 2xf(x) + x^2 f'(x)$

$$= 1 + xf(x) \Leftrightarrow x \cdot f(x) + x^2 f'(x) = 1 \Leftrightarrow f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \cdot f(x))' = (\ln x)' \Leftrightarrow xf(x) = \ln x + c \Leftrightarrow f(x) = \frac{\ln x + c}{x}$$

x > 0
Προσδιορισμός σταθεράς:
Για x = 1 είναι f(1) = 1 οπότε $\frac{\ln 1 + c}{1} = 1 \Leftrightarrow$ c = 1 άρα

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x},\ x > 0$$

γ)
$$f'(x) = \left(\frac{\ln x + 1}{x}\right)' = \frac{(\ln x + 1)' \cdot x - (\ln x + 1)(x)'}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x - 1}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-\ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0		1		+∞
f'	▨	+	0	−	
f	▨	↗	1	↘	

Για x > 1 είναι f '(x) > 0 άρα f ↓ στο [1, +∞).
Για 0 < x < 1 είναι f '(x) < 0 άρα f ↑ στο (0, 1]. Εμφανίζει τοπικό μέγιστο στο x_0 = 1 με τιμή $f(1) = \frac{\ln 1 + 1}{1} = 1$

δ) Κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}(\ln x + 1)\right] = -\infty$$

άρα η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη
Οριζόντιες - πλάγιες
Αναζητώ ευθεία της μορφής y = λx + β, όπου

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x + 1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + 1}{x^2} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$$

$$\beta = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \lambda \cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x + 1}{x} - 0 \cdot x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + 1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

άρα η ασύμπτωτη είναι της μορφής y = λx + β ⇒ y = 0 (οριζόντια) (άξονας x'x)
ε) Είναι A_1 = (0,1], f ↑ άρα
$f(A_1) = (\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)] = (-\infty, 1]$

$A_2 = [1, +\infty)$, f ↓ άρα $f(A_2) = (\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)] = (0, 1]$

Άρα $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) = (-\infty, 1]$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ-ΝΙΚΑΙΑ-ΓΑΛΑΤΣΙ