ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 e^x + 2x e^x$. Να βρείτε:

1. Το πεδίο ορισμού της f.
2. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' και yy'
3. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx'
4. Το σημείο στο οποίο η ευθεία x=1 τέμνει την γραφική παράσταση της f.

2ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R και ισχύει

$$g(x)=x^2 f(x)+\alpha x,\quad \alpha\in R$$

Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο A(2,f(2)) είναι y=3x-4 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο B(2,4).

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

β) να βρείτε τα $g'(x)$ και $g''(x)$

γ) να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της g έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

δ) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της g για $x_o=4$.

ε) να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο M(4,g(4)).

στ) σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της g η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

4ο ΘΕΜΑ

Για μια συνεχή συνάρτηση f με x > 1 ισχύει:

$$f(x^2+1)=x^2-x+2 \quad (1)$$

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x\to 5} f(x)$

(β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(5,f(5)).

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το R.
2. Για να βρούμε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' λύνουμε την εξίσωση f(x)=0 και έχουμε: $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2e^2+2xe^x=0 \Leftrightarrow$

$e^x(x^2+2x)=0 \Leftrightarrow e^x=0$ αδύνατη

ή $x^2+2x=0 \Leftrightarrow x=0$

ή x= -2

άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα (0,0) και (-2,0).

Για να βρούμε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' αρκεί να βρούμε την τιμή f(0). Πράγματι:
$f(0)=0^2e^2+2\cdot 0\cdot e^0=0$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το (0,0).

3. Λύνουμε την ανίσωση

$$f(x)<0 \Leftrightarrow x^2e^x+2x\,e^x<0 \Leftrightarrow e^x(x^2+2x)<0 \Leftrightarrow x^2+2x<0$$

($e^x>0$ για κάθε $x\in R$).

		-2		0	
x^2+2x	+	0	-	0	+

άρα -2 < x <0.

4. Το σημείο στο οποίο η ευθεία x=1 τέμνει την γραφική παράσταση της f είναι το (1, f(1)) οπότε,

$$f(1)=1^2 e+2\cdot 1\cdot e=e+2e=3e$$

άρα το σημείο είναι το (1, 3e)

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η εφαπτομένη της f στο σημείο A(2,f(2)) είναι η ευθεία y=3x-4 άρα: $f'(2)=3 \quad (1)$

Το σημείο B(2,4) είναι σημείο της γραφικής παράστασης της g άρα:

$g(2)=4 \Leftrightarrow 2^2f(2)+\alpha\cdot 2=4 \Leftrightarrow 4f(2)+2\alpha=4 \quad (2)$

Το σημείο A(2,f(2)) ανήκει στην ευθεία y=3x-4 οπότε:

$$f(2)=3\cdot 2-4=2$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow 4\cdot 2+2\alpha=4 \Leftrightarrow 2\alpha=-4 \Leftrightarrow \alpha=-2$$

άρα $g(x)=x^2f(x)-2x$ και $g'(x)=2x\,f(x)+x^2\,f'(x)-2$

άρα $g'(2)=2\cdot 2f(2)+2^2f'(2)-2$ και λόγω της (1) έχουμε:

$g'(2)=4\cdot 2+4\cdot 3-2=18$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο B(2,4) είναι: $g-g(2)=g'(2)\,(x-2) \Leftrightarrow y-4=18\,(x-2)$

$$y=18x-32$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Το πεδίο ορισμού της g είναι το R.

β) $g'(x)=x^2+x-2$

$g''(x)=2x+1$

γ) Πρέπει $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x_1=-2$, $x_2=1$

άρα η g έχει οριζόντιες εφαπτομένες στα σημεία (-2, g(-2)) και (1, g(1)).

δ) $g'(4)=4^2+4-2=18$

ε) $y-g(4)=g'(4)\,(x-4) \Leftrightarrow y-\frac{64}{3}=18(x-4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y-\frac{64}{3}=18x-72 \Leftrightarrow y=18x-72+\frac{64}{3} \Leftrightarrow y=18x-\frac{152}{3}$$

στ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο (x, g(x)) είναι:

$$g'(x)=x^2+x-2$$

Οπότε αναζητούμε τις τιμές των x που η $g'(x)$ έχει ελάχιστο.

		- 1/2	
g''	-	0	+
g'	↘		↗

Επομένως: $g''(x)=2x+1$

$$g''(x)\ge 0 \Leftrightarrow 2x+1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge -\frac{1}{2}$$

άρα για x=-1/2 η g έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το (- 1/2, g(-1/2))

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

(α) Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x\in R$ θα ισχύει: $\lim_{x\to 5} f(x)=f(5)$

Για x=2 η σχέση (1) γίνεται: $f(2^2+1)=2^2-2+2 \Leftrightarrow f(5)=4$

Επομένως: $\lim_{x\to 5} f(x)=4$

(β) $[f(x^2+1)]'=(x^2-x+2)' \Leftrightarrow f'(x^2+1)\cdot(x^2+1)'=2x-1 \Leftrightarrow$

$$f'(x^2+1)\cdot 2x=2x-1 \Leftrightarrow f'(x^2+1)=\frac{2x-1}{2x}$$

Για x=2 έχουμε: $f'(2^2+1)=\frac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}$ άρα $f'(5)=\frac{3}{4}$

και η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-f(5)=f'(5)\,(x-5) \Leftrightarrow y-4=\frac{3}{4}(x-5) \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ-ΝΙΚΑΙΑ-ΓΑΛΑΤΣΙ