

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1^ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 e^x + 2x e^x$. Να βρείτε:

1. Το πεδίο ορισμού της f .
2. Τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' και yy' .
3. Για ποιές τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx' .
4. Το σημείο στο οποίο η ευθεία $x=1$ τέμνει την γραφική παράσταση της f .

2^ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $g(x) = x^2 f(x) + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Αν η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $A(2, f(2))$ είναι $y = 3x - 4$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(2, 4)$.

3^ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

- α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της g
- β) να βρείτε τα $g'(x)$ και $g''(x)$

γ) να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της g έχει οριζόντιες εφαπτομένες.

δ) να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της g για $x_0 = 4$.

ε) να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $M(4, g(4))$.

στ) σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της g η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

4^ο ΘΕΜΑ

Για μια συνεχή συνάρτηση f με $x > 1$ ισχύει:

$$f(x^2 + 1) = x^2 - x + 2 \quad (1)$$

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

(β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5, f(5))$.

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το \mathbb{R} .
2. Για να βρούμε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα xx' λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ και έχουμε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^x + 2x e^x = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ αδύνατη ή $x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$\text{ή } x = -2$$

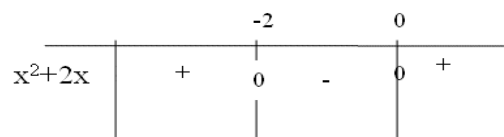
άρα τα ζητούμενα σημεία είναι τα $(0, 0)$ και $(-2, 0)$.
Για να βρούμε τα σημεία που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον yy' αρκεί να βρούμε την τιμή $f(0)$. Πράγματι: $f(0) = 0^2 e^0 + 2 \cdot 0 \cdot e^0 = 0$

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $(0, 0)$.

3. Λύνουμε την ανίσωση

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 e^x + 2x e^x < 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 + 2x) < 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x < 0$$

($e^x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).



άρα $-2 < x < 0$.

4. Το σημείο στο οποίο η ευθεία $x=1$ τέμνει την γραφική παράσταση της f είναι το $(1, f(1))$ οπότε,

$$f(1) = 1^2 e + 2 \cdot 1 \cdot e = e + 2e = 3e$$

άρα το σημείο είναι το $(1, 3e)$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η εφαπτομένη της f στο σημείο $A(2, f(2))$ είναι η ευθεία $y = 3x - 4$ άρα: $f'(2) = 3$ (1)

Το σημείο $B(2, 4)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης της g άρα:

$$g(2) = 4 \Leftrightarrow 2^2 f(2) + \alpha \cdot 2 = 4 \Leftrightarrow 4f(2) + 2\alpha = 4 \quad (2)$$

Το σημείο $A(2, f(2))$ ανήκει στην ευθεία $y = 3x - 4$ οπότε:

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 4 = 2$$

Από τη σχέση (2) έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow 4 \cdot 2 + 2\alpha = 4 \Leftrightarrow 2\alpha = -4 \Leftrightarrow \alpha = -2$$

άρα $g(x) = x^2 f(x) - 2x$ και $g'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x) - 2$

άρα $g'(2) = 2 \cdot 2f(2) + 2^2 f'(2) - 2$ και λόγω της (1) έχουμε:

$$g'(2) = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 - 2 = 18$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο $B(2, 4)$

$$\text{είναι: } g - g(2) = g'(2)(x - 2) \Leftrightarrow y - 4 = 18(x - 2) \Leftrightarrow y = 18x - 32$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Το πεδίο ορισμού της g είναι το \mathbb{R} .

β) $g'(x) = x^2 + x - 2$

$$g''(x) = 2x + 1$$

γ) Πρέπει $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2$, $x_2 = 1$

άρα η g έχει οριζόντιες εφαπτομένες στα σημεία $(-2, g(-2))$

και $(1, g(1))$.

$$\delta) g'(4) = 4^2 + 4 - 2 = 18$$

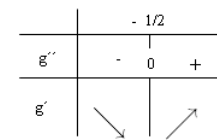
$$\epsilon) y - g(4) = g'(4)(x - 4) \Leftrightarrow y - \frac{64}{3} = 18(x - 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - \frac{64}{3} = 18x - 72 \Leftrightarrow y = 18x - 72 + \frac{64}{3} \Leftrightarrow y = 18x - \frac{152}{3}$$

στ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(x, g(x))$ είναι:

$$g'(x) = x^2 + x - 2$$

Οπότε αναζητούμε τις τιμές των x που η $g'(x)$ έχει ελάχι-



στο. Επομένως: $g''(x) = 2x + 1$

$$g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

άρα για $x = -1/2$ η g έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης. Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το $(-1/2, g(-1/2))$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

(α) Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = f(5)$

Για $x=2$ η σχέση (1) γίνεται: $f(2^2 + 1) = 2^2 - 2 + 2 \Leftrightarrow f(5) = 4$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4$

(β) $[f(x^2 + 1)]' = (x^2 - x + 2)' \Leftrightarrow f'(x^2 + 1) \cdot (x^2 + 1)' = 2x - 1 \Leftrightarrow$

$$f'(x^2 + 1) \cdot 2x = 2x - 1 \Leftrightarrow f'(x^2 + 1) = \frac{2x - 1}{2x}$$

Για $x=2$ έχουμε: $f'(2^2 + 1) = \frac{2 \cdot 2 - 1}{2 \cdot 2}$ άρα $f'(5) = \frac{3}{4}$

και η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y - f(5) = f'(5)(x - 5) \Leftrightarrow y - 4 = \frac{3}{4}(x - 5) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΠΕΙΡΑΙΑΣ-ΝΙΚΑΙΑ-ΓΑΛΑΤΣΙ