ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Θεωρούμε την εξίσωση $(z+1)^{\nu} + (z-1)^{\nu} = \alpha$ (1) όπου α είναι η ακτίνα του κύκλου $z \cdot \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z \cdot \overline{z_o}) + 1 - |z_o|^2$ (2)

και ν είναι φυσικός άρτιος. Να δειχθεί ότι η εξίσωση (1) δεν έχει ρίζα στο R.

2ο ΘΕΜΑ

Θεωρούμε τον μιγαδικό z=x+yi, με $\mathrm{Im}(z) \le 1$, $x \in R$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $|z| + \mathrm{Im}(z) = 1$ (2) με πεδίο ορισμού το σύνολο

$$\left\{ z \in C \,/ \left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1 \right\}$$

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1] \to [0,1]$ με τύπο $f(x) = \dfrac{(x+1) \cdot (x+\alpha)}{x^2+1}$

i) να βρεθεί ο α
ii) δείξτε ότι η f είναι "1-1".

4ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \to B$ με f(A)=B και $g: B \to A$ με g(B)=A ($A \ne B$). Αν είναι (fog)(x) = x, $x \in B$ και (gof)(x), $x \in A$, να δειχθεί ότι
α) Οι f, g είναι "1-1"
β) $f^{-1}(x) = g(x)$, $x \in B$ και $g^{-1}(x) = f(x)$, $x \in A$

5ο ΘΕΜΑ

Έστω $f: A \to R$, η οποία είναι γνησιως αύξουσα. Να δείξετε ότι
α. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο f(A)
β. Η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ είναι και ρίζα της εξίσωσης f(x) = x

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$z \cdot \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z \cdot \overline{z_0}) + 1 - |z_0|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + |z_0|^2 = 2 \cdot \frac{z \cdot \overline{z_0} + \bar{z} \cdot z_0}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow z \cdot \bar{z} + z_0 \cdot \overline{z_0} - z \cdot \overline{z_0} - \bar{z} \cdot z_0 = 1$$

$$z \cdot (\bar{z} - \overline{z_0}) - z_0 \cdot (\bar{z} - \overline{z_0}) = 1 \Leftrightarrow (\bar{z} - \overline{z_0}) \cdot (z - z_0) = 1$$

$$\Leftrightarrow |z - z_0|^2 = 1 \Leftrightarrow |z - z_0| = 1 \quad (3)$$

Άρα η (3) παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο την εικόνα του z_0 και ακτίνα ρ = 1, οπότε α = 1
Η (1) γράφεται $(z+1)^{\nu} + (z-1)^{\nu} = 1$. Έστω ότι μια πραγματική ρίζα z = β, τότε $(\beta+1)^{\nu} + (\beta-1)^{\nu} = 1$
Επειδή ν άρτιος άρα ισχύει
$(\beta+1)^{\nu} \le 1$ και $(\beta-1)^{\nu} \le 1$

άρα $|\beta+1|^{\nu} \le 1$ και $|\beta-1|^{\nu} \le 1$

Οι σχέσεις γράφονται

$$\begin{cases} -1 \le \beta + 1 \le 1 \\ -1 \le \beta - 1 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le \beta \le 0 \\ 0 \le \beta \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \{ \beta = 0$$

που είναι άτοπο διότι η λύση β = 0 δεν επαληθεύει την (1)

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω z=x+yi άρα η (2) γράφεται $|z| + \mathrm{Im}(z) = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} + y = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 - y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1 - 2y + y^2 \Leftrightarrow y = \frac{1-x^2}{2} \text{ ή } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

Έχουμε ακόμα $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow |z+1| < |z-1| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |x + yi + 1| < |x + yi - 1| \Leftrightarrow |(x+1) + yi| < |(x-1) + yi|$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 < (x-1)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 < x^2 - 2x + 1 + y^2 \Leftrightarrow 4x < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

'Αρα η $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}$ ορίζεται στο $(-\infty, 0)$.

Όποτε για $x_1 < x_2 < 0$ είναι $x_1^2 > x_2^2 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}x_1^2 < -\dfrac{1}{2}x_2^2 \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

άρα η f είναι γνήσια αυξουσα στο $(-\infty, 0)$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

i) Αφού η $f:[0,1] \to [0,1]$ σημαίνει ότι και το f(0) και το f(1) θα ανήκουν στο [0, 1]. Όμως f(0) = α και το f(1) = α + 1
άρα

$$\begin{matrix} \alpha \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le \alpha \le 1 \\ \alpha + 1 \in [0,1] \Leftrightarrow 0 \le \alpha + 1 \le 1 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le \alpha \le 1 \\ -1 \le \alpha \le 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 0$
Οπότε η $f(x) = \dfrac{x(x+1)}{x^2+1}$, $x \in [0, 1]$

ii) 'Εστω $x_1, x_2 \in [0, 1]$ με

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1(x_1+1)}{x_1^2+1} = \frac{x_2(x_2+1)}{x_2^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_1)(x_2^2 + 1) = (x_2^2 + x_2)(x_1^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1x_2^2 + x_1 - x_2^2 - x_1^2x_2 - x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - x_1x_2(x_1 - x_2) + (x_1 - x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - x_1x_2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + 1 + x_2(1 - x_1)) = 0$$

Είναι $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $1 - x_1 \ge 0$ άρα $x_2(1 - x_1) \ge 0$ οπότε

$$x_1 + 1 + x_2(1 - x_1) \ge 1 > 0$$

Άρα $x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε η f "1-1"

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Έστω $x_1 \ne x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$
αν ήταν $f(x_1) = f(x_2)$ τότε θα είχαμε
$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ Άτοπο

άρα είναι $f(x_1) \ne f(x_2)$ άρα f "1-1"

όμοια δείχνουμε ότι η g είναι "1-1"

β) Αφού f, g "1-1" άρα υπάρχουν οι $f^{-1}: B \to A$ και $g^{-1}: A \to B$. Ισχύει $(fog)(x) = x,\ x \in B$

$$\Rightarrow f^{-1}o(fog)(x) = f^{-1}(x),\ x \in B$$

$$\Rightarrow (f^{-1}of)(g(x)) = f^{-1}(x),\ x \in B \Rightarrow g(x) = f^{-1}(x),\ x \in B$$

Όμοια από το (gof)(x) = x, $x \in A$ δείχνουμε ότι
$f(x) = g^{-1}(x)$, $x \in A$

ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α. Έστω $y_1, y_2 \in f(A)$, τότε

$y_1 = f(f^{-1}(y_1))$ και $y_2 = f(f^{-1}(y_2))$

Είναι $y_1 < y_2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1)) < f(f^{-1}(y_2 \Leftrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

(αφού f είναι γνήσια αύξουσα)
άρα f^{-1} γνησίως αύξουσα στο f(A)
β. Έστω ότι $x_0 \in A \cap f(A)$ είναι ρίζα της εξίσωσης
$f(x) = f^{-1}(x)$ άρα είναι $f(x_0) = f^{-1}(x_0)$.
Θα δείξουμε ότι $f(x_0) = x_0$
Έστω ότι $f(x_0) \ne x_0 \Leftrightarrow f(x_0) < x_0$ ή $f(x_0) > x_0$
Αν $f(x_0) < x_0$ τότε $f^{-1}(f(x_0)) < f^{-1}(x_0)$ ή $x_0 < f(x_0)$ (Άτοπο)
Αν $f(x_0) > x_0$ τότε $f^{-1}(f(x_0)) > f^{-1}(x_0)$ ή $x_0 > f(x_0)$ (Άτοπο)
Άρα $f(x_0) = x_0$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**