ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Φυσική Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ

Έστω ένα οριζόντιο δάπεδο μεγάλου μήκους πάνω στο οποίο βρίσκονται: Ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς K = 150 N/m δεμένο στο ένα του άκρο ακλόνητα, ενώ στο ελεύθερο άκρο του είναι δεμένο σώμα μάζας m = 1,5 kg, το οποίο εκτελεί Α.Α.Τ. πάνω στο οριζόντιο δάπεδο και μια ακίνητη συμπαγής και ομογενής σφαίρα μάζας M = 1,5 kg και ακτίνας R = 0,2 m όπως φαίνονται στο σχήμα.

Στο κέντρο της σφαίρας ασκείται οριζόντια σταθερή δύναμη F = 21 N οπότε η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στο οριζόντιο δάπεδο.
Το ελατήριο επιμηκύνεται κατά d=0,3m και τη χρονική στιγμή t=0 αφήνεται ελεύθερο να ταλαντωθεί. Τη στιγμή που βρίσκεται το ελατήριο για πρώτη φορά μετά τη χρονική στιγμή t=0 στην ίδια επιμήκυνση έρχεται η σφαίρα και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με τη μάζα m.
Να βρεθούν :
1. Το μέτρο της τριβής που ασκείται στη σφαίρα στη διάρκεια της κύλισης
2. Το διάστημα που διανύει η σφαίρα μέχρι να συγκρουστεί με την μάζα m και η ταχύτητα που αποκτά λίγο πριν την κρούση
3. Το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελεί η μάζα m αμέσως με την κρούση
4. Η αρχική φάση της ταλάντωσης που θα εκτελεί η μάζα m αμέσως μετά την κρούση
5. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής για την μάζα m που ταλαντώνεται σε χρόνο t=T/2 αμέσως μετά την κρούση
6. Η μάζα m επιστρέφοντας στο σημείο της κρούσης δίνει πλαστική κρούση με τη σφαίρα δημιουργώντας συσσωμάτωμα. Να βρεθεί το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.

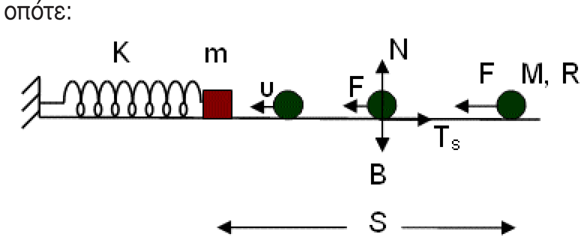
Δίνονται : $I_{σφ}=(2/5)MR^2$, ημ26°=ημ154°=0,43. Οι ταλαντώσεις που εκτελούνται γίνονται χωρίς τριβές ($π^2=10$).

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ

1. Το σώμα μάζας m στη διάρκεια της ταλάντωσης του θα βρεθεί στην ίδια θέση μετά τη χρονική στιγμή t=0 σε χρόνο μιάς περιόδου.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} \Rightarrow T=\frac{\pi}{5}\,s$$

Στον ίδιο χρόνο η σφαίρα θα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει οπότε:



Λόγω μεταφοράς $\Sigma\vec{F} = M\cdot \vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow F - T_s = M\cdot \alpha_{cm}$ (1)

Λόγω περιστροφής

$\Sigma\vec{\tau} = I\cdot \vec{\alpha\gamma}$ (α)

$\alpha\gamma = \frac{\alpha_{cm}}{R}$ (β) απο (α), (β), (γ) $\Rightarrow T_s = \frac{2}{5} M\cdot \alpha_{cm}$ (2)

$\Sigma\tau = T_s\cdot R$ (γ)

Οπότε η (1) λόγω της (2)γίνεται:

$$F - \frac{2}{5}M\cdot \alpha_{cm} = M\cdot \alpha_{cm} \Rightarrow F=\frac{7}{5}M\cdot \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm}=\frac{5F}{7M} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_{cm}=10m/s^2$$

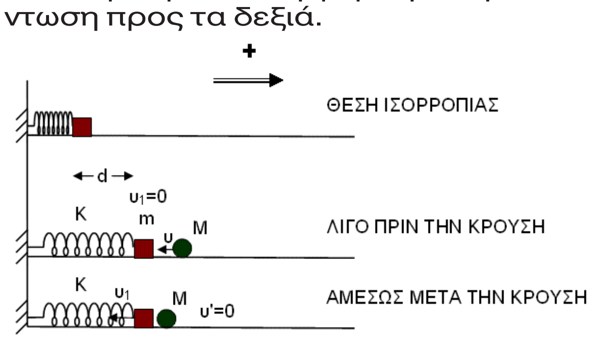
Άρα (2) ⇒ T_s=6N

2. Η κίνηση της σφαίρας είναι επιταχυνόμενη οπότε ισχύουν

$$S = \frac{1}{2}\alpha_{cm}t^2 \Rightarrow S=2m$$

$$υ=υ_{cm} = \alpha_{cm}t \Rightarrow υ_{cm} = 2\pi\ m/s$$

3. Θεωρούμε θετική φορά για την ταλάντωση προς τα δεξιά.



Εφόσον η κρούση είναι κεντρική και ελαστική και τα δύο σώματα έχουν ίσες μάζες (M=m) ανταλλάσουν ταχύτητες.
Μάζα m: $υ'_1 = υ_{cm} = 2\pi\ m/s$ Σφαίρα: $υ' = υ_1 = 0$
Οπότε για το σύστημα ελατήριο-μάζας αμέσως μετά την κρούση εφαρμόζουμε Α.Δ.Ε. ταλάντωσης.

$$E_{ΟΛ} = K+U \Rightarrow \frac{1}{2}KA'^2 = \frac{1}{2}mυ'^2_1 + \frac{1}{2}KA^2 \quad (3)$$

όπου A=d=0,3m, $υ'_1 = 2\pi\ m/s$ και A' το καινούργιο πλάτος ταλάντωσης οπότε (3) ⇒ A' =0,7m

4. Για την ταλάντωση της μάζας m αμέσως μετά την κρούση ισχύουν:

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \omega = 10\ r/s$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0{,}7ημ\ (10t+φ_o) \\ Σε\ t=0\ το\ x=d=+0{,}3m \end{array}\right\} \Rightarrow 0{,}3 = 0{,}7\ ημφ_o \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ημφ_o \approx 0{,}43$$

οπότε $φ_o$=26° ή $φ_o$=154°
Επειδή τη χρονική στιγμή t=0 αμέσως μετά την κρούση η μάζα m έχει αρνητική ταχύτητα δεκτή είναι η λύση $φ_o$=154°

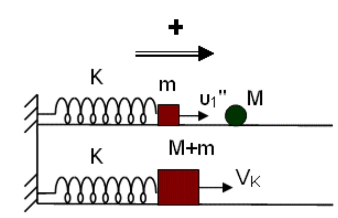
5. Για τον ρυθμό μεταβολής της ορμής ισχύει: $\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} = \Sigma\vec{F} = -Kx$ (4)

$$\left.\begin{array}{l} οπου\ x=0{,}7ημ\ (10t+154^o) \\ t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{10}\,s \end{array}\right\} \Rightarrow x=0{,}7ημ\ (\pi+154^o) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -0{,}3m$$

οπότε (4) $\Rightarrow \frac{\Delta P}{\Delta t} = 45N$

6.



Η μάζα m επιστρέφει στο σημείο της κρούσης με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα που απέκτησε αμέσως μετά την κρούση. Άρα $υ''_1 = υ'_1 = 2\pi\ m/s$ και γίνεται πλαστική κρούση με την ακίνητη σφαίρα δημιουργώντας συσσωμάτωμα.
Εφαρμόζουμε Α.Δ.Ο.

$$\vec{P}_{αρχ} = \vec{P}_{τελ} \rightarrow mυ''_1 = (M+m)V_κ \Rightarrow V_κ = \frac{mυ''_1}{M+m} \Rightarrow V_κ = \pi\ m/s$$

Έστω A'' το πλάτος ταλάντωσης του συσσωματώματος.Εφαρμόζωντας Α.Δ.Ε. ταλάντωσης για το συσσωμάτωμα.

$$E_{ΟΛ} = K+U \Rightarrow \frac{1}{2}KA''^2 = \frac{1}{2}(M+m)V_K^2 + \frac{1}{2}Kd^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A'' = \sqrt{\frac{(M+m)V_K^2}{K} + d^2} \Rightarrow A''=0{,}54m$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**