ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται ο σταθερός μιγαδικός $w \neq 0$.

α) Να αποδειχθεί ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M(z) του μιγαδικού επιπέδου, για τους οποίους ισχύει

$$|z|^2-2\begin{vmatrix} \mathrm{Re}(z) & \mathrm{Im}(z) \\ -\mathrm{Im}(w) & \mathrm{Re}(w) \end{vmatrix}=0 \quad (1)$$

είναι κύκλος με κέντρο την εικόνα του w.

β) Αν $|w| = 4$ και ρ η ακτίνα του παραπάνω κύκλου, τότε να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x\ln x$, την ασύμπτωτη στο $+\infty$ της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x$, την κατακόρυφη ασύμπτωτη της συνάρτησης $\varphi(x)=\dfrac{2x^2-5x+7}{x-e}$ και την ευθεία $x=\rho$.

2ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R, για την οποία ισχύει $2f(2x)-f(x)=2x$ (1), $x\in R$ και η συνάρτηση

$$F(x)=x\int_1^2 f(xt)dx-x^2+3,\quad x\in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1 \in (0,1)$ και $x_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f'(x_1) + 2f'(x_2) = 2$

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι σταθερή και να βρείτε την τιμή της

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^4 f(x)\,dx$$

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f για την οποία $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και οι μιγαδικοί $z_1=\alpha^2+if(\alpha)$ και $z_2=\dfrac{1}{\beta^2+i\dfrac{1}{f(\beta)}}$ με $0<\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει $|z_1+\bar{z}_2|=|z_1-\bar{z}_2|$.

α) Ο z_1z_2 είναι φανταστικος.

β) Οι αριθμοί f(α) και f(β) είναι ανάλογοι των τετραγώνων των α και β.

γ) Υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Έστω $w = \alpha + \beta i$ και $z = x + yi$ τότε

$$(1)\Leftrightarrow x^2+y^2-2\begin{vmatrix} x & y \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2+y^2-2\beta y+\beta^2=\alpha^2+\beta^2$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=|w|^2$$

που παριστάνει κύκλο με κέντρο K(α,β) δηλαδή την εικόνα του w

β) Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

$$=\frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1}=\frac{2}{2}=1$$

Οπότε η ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$ είναι η $y = 1$

Επίσης $D_\varphi=R-\{e\}$όπου φ συνεχής και

$$\lim_{x\to e^+}\varphi(x)=\lim_{x\to e^+}\left(\frac{1}{x-e}(2x^2-5x+7)\right)=+\infty\cdot(2e^2-5e+7)=+\infty$$

άρα $x=e$ μοναδική κατακόρυφη ασύμπτωτη. Ακόμα $|w|=4$ οπότε ρ=4. Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E=\int_e^4 (f(x)-1)\,dx=\int_e^4\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx-\int_e^4 dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{2}\ln x\right]_e^4-\int_e^4\frac{x^2}{2}(\ln x)'\,dx-(4-e)=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\int_e^4\frac{x}{2}dx-4+e=$$

$$=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_e^4-4+e=8\ln 4-\frac{e^2}{2}-4+\frac{e^2}{4}-4+e=8\ln 4-\frac{e^2}{4}+e-8$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) $(1)\overset{x=0}{\Longrightarrow} 2f(0)-f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0$

$(1)\overset{x=1}{\Longrightarrow} 2f(2)-f(1)=2$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R οπότε εφαρμόζεται ΘΜΤ σε κάθε διάστημα. Επομένως υπάρχουν $x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,2)$ τέτοια ώστε

$f'(x_1)=\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)$ και $f'(x_2)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f'(x_2)=2f(2)-2f(1)$. Οπότε $f'(x_1)+2f'(x_2)=2$

β) Για το ολοκλήρωμα $I_1=x\displaystyle\int_1^2 f(xt)dt=\int_1^2 f(xt)xdt$ θέτουμε $u=xt=g(t)$ οπότε $u_1=g(1)=x$, $u_2=g(2)=2x$ και $du=xdt$ οπότε

$$I_1=\int_x^{2x} f(u)du$$

Οπότε

$$F(x)=\int_x^{2x} f(u)du-x^2+3$$

$$F'(x)=\left(\int_1^{2x} f(u)\,du-\int_1^{x} f(u)\,du-x^2+3\right)'=$$

$$=f(2x)\,(2x)'-f(x)-2x=2f(2x)-f(x)-2x\overset{(1)}{=}0$$

Οπότε F σταθερή. Επομένως για κάθε $x\in R$ ισχύει

$$F(x)=F(0)=0\int_1^2 f(0)dt-0^2+3=3$$

γ) Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε

$$F(x)=\int_x^{2x} f(u)du-x^2+3\Leftrightarrow\int_x^{2x} f(u)du=x^2 \quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}(2)\overset{x=1}{\Rightarrow}\int_1^2 f(u)\,du=1\\ (2)\overset{x=2}{\Rightarrow}\int_2^4 f(u)\,du=4\end{aligned}\right\}\overset{(+)}{\Longrightarrow}\int_1^4 f(x)\,dx=5\Leftrightarrow I=5$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Διαδοχικά έχουμε $|z_1+\bar{z}_2|=|z_1-\bar{z}_2|\Leftrightarrow|z_1+\bar{z}_2|^2=|z_1-\bar{z}_2|^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(z_1+\bar{z}_2)\cdot(\bar{z}_1+z_2)=(z_1-\bar{z}_2)\cdot(\bar{z}_1-z_2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_1+z_1z_2+\bar{z}_2\bar{z}_1+\bar{z}_2z_2=z_1\bar{z}_1-z_1z_2-\bar{z}_2\bar{z}_1+\bar{z}_2z_2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z_1z_2+2\overline{z_1z_2}=0\Leftrightarrow z_1z_2+\overline{z_1z_2}=0\Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z_1z_2)=0\Leftrightarrow z_1z_2$$

φανταστικός.

β) Είναι $z_1z_2=(\alpha^2+if(\alpha))\left(\dfrac{1}{\beta^2}+i\dfrac{1}{f(\beta)}\right)=$

$$=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+i\frac{\alpha^2}{f(\beta)}+i\frac{f(\alpha)}{\beta^2}-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}+i\left(\frac{\alpha^2}{f(\beta)}+\frac{f(\alpha)}{\beta^2}\right)\quad(1)$$

Αλλά z_1z_2 φανταστικός $\Leftrightarrow\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}-\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=0\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{f(\beta)}=\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}\quad(1)$

Οπότε f(α) και f(β) είναι ανάλογα των τετραγώνων των α, β.

γ) $(1)\Leftrightarrow\dfrac{f(\alpha)}{\alpha^2}=\dfrac{f(\beta)}{\beta^2}$

Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$g'(x)=\dfrac{x^2f'(x)-2xf(x)}{x^4}=\dfrac{xf'(x)-2f(x)}{x^3}$ και επίσης

g(α)=g(β). Οπότε για την g εφαρμόζεται θεώρημα Rolle στο [α,β]. Άρα υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow\xi f'(\xi)-2f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}.$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**