ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2010

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Οι βαθμοί 11 μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών κατεύθυνσης έχουν την μέση τιμή και την διάμεσο ίσες. Οι 10 από τους 11 βαθμούς είναι οι παρακάτω:

9, 16, 8,13, 7, 9, 14, 14, 13, 7

α) Να βρείτε το βαθμό του ενδέκατου μαθητή.
β) Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV της βαθμολογίας των μαθητών.
γ) Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν
Α: "Το ενδεχόμενο ο βαθμός του μαθητή να είναι μεγαλύτερος του 11"
Β: "Το ενδεχόμενο ο βαθμός του μαθητή να είναι μεγαλύτερος του 13"
και ισχύει ότι $B \cup X = A$ να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη πιθανότητα του ενδεχομένου Χ.

2ο ΘΕΜΑ

Σε ένα Λύκειο υπάρχουν δύο τμήματα Α και Β της Γ' τάξης με 18 και 12 μαθητές στο καθένα αντίστοιχα. Ο μέσος όρος των βαθμών για το τμήμα Α είναι 15,8 ενώ ο μέσος όρος των βαθμών και στα δύο τμήματα στα μαθηματικά είναι 15,4.
α) Να βρεθεί ο μέσος όρος των βαθμών του τμήματος Β στα μαθηματικά.
β) Αν δύο μαθητές με βαθμό 16 φύγουν από το τμήμα Α και ο ένας από αυτούς πάει στο τμήμα Β, να βρεθούν οι νέοι μέσοι όροι των βαθμών των τμημάτων.
γ) Αν για τα τμήματα Α και Β ισχύουν:

$$\sum_{i=1}^{18} x_i^2 = 4655{,}52 \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 2676{,}48$$

να βρείτε ποιο από τα δύο τμήματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια βαθμών.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Έστω Χ ο βαθμός του ενδέκατου μαθητή. Επίσης έχουμε ότι $\delta = \bar{x}$. Οι τιμές των δέκα παρατηρήσεων κατά αύξουσα σειρά είναι:

7, 7, 8, 9, 9, 13, 13, 14, 14, 16

Αν x< 9 τότε δ=9
Αν x> 13 τότε δ=13
Αν $9 \le x \le 13$ τότε δ=x

Άρα: Για x< 9 έχω $\delta = 9 \Rightarrow \bar{x} = 9$ οπότε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{\nu} \Leftrightarrow 9 = \frac{110+x}{11} \Leftrightarrow 99 = 110+x \Leftrightarrow x = -11$$

αδύνατο.
Για x> 13 έχω $\delta = 13 \Leftrightarrow \bar{x} = 13$ οπότε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{\nu} \Leftrightarrow 13 = \frac{110+x}{11} \Leftrightarrow 143 = 110+x \Leftrightarrow x = 33$$

αδύνατο.

Αν $9 \le x \le 13$ τότε $\delta = x \Leftrightarrow x = \bar{x}$ οπότε

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i}{\nu} \Leftrightarrow x = \frac{110+x}{11} \Leftrightarrow 11x = 110+x \Leftrightarrow x = 11$$

δεκτό.

Επομένως ο βαθμός του μαθητή είναι 11.
Επίσης $\delta = \bar{x} = 11$

β)

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{11} (x_i-\bar{x})^2}{\nu} = \frac{16+16+9+4+4+0+4+4+9+9+25}{11} = \frac{100}{11}$$

άρα $S = \frac{10}{\sqrt{11}} = \frac{10\sqrt{11}}{11}$

Επομένως

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\frac{10\sqrt{11}}{11}}{11} = \frac{10\sqrt{11}}{121}$$

γ) Εφόσον $B \cup X = A$ (1) τότε $B \subseteq A$ και $X \subseteq A$.
Για να ισχύει η (1) το Χ θα πρέπει να έχει τουλάχιστον ως στοιχεία τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β. Δηλαδή, $A - B \subseteq X$. Άρα $A - B \subseteq X \subseteq A$ οπότε $P(A-B) \le P(X) \le P(A)$

Συνεπώς η ελάχιστη πιθανότητα του ενδεχομένου Χ είναι η P(A-B) και η μέγιστη η P(A).
Έχουμε λοιπόν: Ω ={7, 8, 9, 11, 13, 14, 16 }
με P(7) = P(9) = P(13) = P(14) = 2/11 και
P(8) = P(11) = P(16) = 1/11
A = {13, 14, 16 }, B= {14,16} και A-B = {13}
Οπότε P(A) = P(13) + P(14) + P(16) = 5/11
P(A-B) = P(13) = 2/11

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Έστω $\bar{x}_A = 15{,}8$ ο μέσος βαθμός στα μαθηματικά για το τμήμα Α, $\bar{x}_B$ για το τμήμα Β και $\bar{x} = 15{,}4$ ο μέσος βαθμός και για τα δύο τμήματα. Ισχύει ότι:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_A \cdot V_A + \bar{x}_B \cdot V_B}{V_A + V_B} \Leftrightarrow 15{,}4 = \frac{15{,}8 \cdot 18 + \bar{x}_B \cdot 12}{18+12} \Leftrightarrow$$

$$15{,}4 = \frac{284{,}4 + 12\bar{x}_B}{30} \Leftrightarrow 462 = 284{,}4 + 12\bar{x}_B \Leftrightarrow \bar{x}_B = 14{,}8$$

β) Δύο μαθητές φεύγουν από το τμήμα Α άρα $V_A = 16$ και ο ένας πάει στο τμήμα Β άρα $V_B = 13$. Επομένως ο μέσος βαθμός για το τμήμα Α είναι:

$$\bar{x}_A = \frac{18 \cdot 15{,}8 - 2 \cdot 16}{16} = \frac{284{,}4 - 32}{16} = 15{,}775$$

και για το τμήμα Β είναι:

$$\bar{x}_B = \frac{12 \cdot 14{,}8 + 16}{13} = \frac{177{,}6 + 16}{13} \approx 14{,}9$$

γ) Ξέρουμε ότι: $S^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 - \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\nu}\right)$ και αυτό γίνεται:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i\right)^2}{\nu^2} \Leftrightarrow S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} x_i^2}{\nu} - \bar{x}^2$$

Έχουμε λοιπόν:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{i=1}^{18} x_i^2}{18} - \bar{x}_A^2 = \frac{4655{,}52}{18} - 15{,}8^2 = 258{,}64 - 249{,}64 = 9$$

$$\Leftrightarrow S_A = 3$$

$$S_B^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} x_i^2}{12} - \bar{x}_B^2 = \frac{2676{,}48}{12} - 14{,}8^2 = 223{,}04 - 219{,}04 = 4$$

$$\Leftrightarrow S_B = 2$$

Άρα: $CV_A = \frac{S_A}{\bar{x}_A} = \frac{3}{15{,}8} \approx 0{,}19$

$$CV_B = \frac{S_B}{\bar{x}_B} = \frac{2}{14{,}8} \approx 0{,}135$$

Επομένως $CV_A > CV_B$ άρα το τμήμα Β έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**