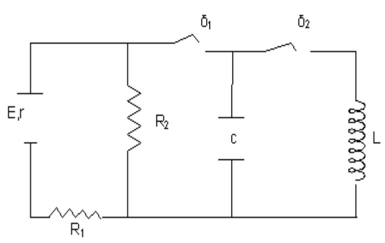
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Φυσική Κατεύθυνσης

ΘΕΜΑ

Δίνεται το ηλεκτρικό κύκλωμα του σχήματος που περιέχει μπαταρία με στοιχεία Ε=20V, r=0,5Ω δύο αντιστάσεις R_1=2,5Ω και R_2=2Ω πυκνωτή με χωρητικότητα C=10μF και ιδανικό πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής L=1mH.



Α. Αρχικά ο διακόπτης $δ_1$ είναι κλειστός ενώ ο $δ_2$ είναι ανοικτός. Να βρεθούν :

1. Το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής. Να εξηγήσετε ποιος οπλισμός φορτίζεται θετικά.

2. Ακαριαία τη χρονική στιγμή t=0 ανοίγουμε τον διακόπτη $δ_1$ και κλείνουμε τον διακόπτη $δ_2$ οπότε το κύκλωμα LC εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση. Να βρεθούν:

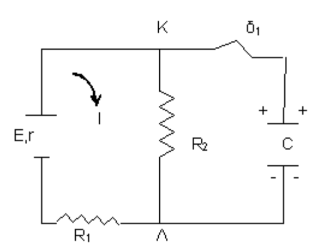
ι) η χρονική στιγμή που η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου του πυκνωτή γίνεται για πρώτη φορά ίση με την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου του πηνίου.

ιι) εκείνη τη χρονική στιγμή να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της έντασης του ρεύματος.

Β. Σε σειρά με το ιδανικό πηνίο συνδέουμε ωμικό αντιστάτη R_3 διατηρώντας τον διακόπτη $δ_2$ κλειστό, οπότε το κύκλωμα εκτελεί φθίνουσα ταλάντωση όπου το πλάτος του φορτίου του πυκνωτή μεταβάλλεται από την εξίσωση $Q=Q_oe^{-4ln2t}$. Υποθέτωντας ότι η περίοδος της φθίνουσας ταλάντωσης παραμένει σταθερή $T=10^{-1}s$, να βρεθεί το πλήθος των ταλαντώσεων που έχει εκτελέσει το κύκλωμα μέχρι το πλάτος του φορτίου να υποτετραπλασιαστεί.

ΛΥΣΗ

Α.



1. Με κλειστό το διακόπτη $δ_1$ και ανοικτό το $δ_2$ το κύκλωμα που λειτουργεί φαίνεται στο σχήμα.

Ο κλάδος που περιέχει τον πυκνωτή δεν διαρρέεται από ρεύμα.Το ρεύμα στο κύκλωμα θα είναι:

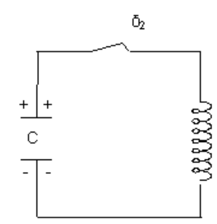
$$I = \frac{E}{R_{ΟΛ}} = \frac{E}{R_1 + R_2 + r} \Rightarrow I = 4A$$

Ο πυκνωτής είναι παράλληλα συνδεδεμένος με την αντίσταση R_2 οπότε θα ισχύει $V_C = V_{R_2} = I\cdot R_2 = 8Volt$

το μέγιστο φορτίο που αποκτά ο πυκνωτής θα είναι: $Q = C\cdot V_C \Rightarrow Q=8\cdot 10^{-5}c$

θετικά θα φορτιστεί ο πάνω οπλισμός του πυκνωτή ο οποίος συνδέεται μέσω διακόπτη με το θετικό πόλο της μπαταρίας.

2. Ανοίγει ο $δ_1$ και κλείνει ο $δ_2$, άρα λειτουργεί το κύκλωμα LC που εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση.



Ι. Τη χρονική στιγμή t=0 που κλείνει ο διακόπτης $δ_2$ ο πυκνωτής έχει φορτίο $q=+Q=8\cdot10^{-5}c$ και το ρεύμα i στο κύκλωμα είναι μηδέν, άρα στην ηλεκτρική ταλάντωση δεν υπάρχει αρχική φάση $φ_o=0$.

Ψάχνουμε τη χρονική στιγμή όπου $U_E = U_B = \frac{E_{ΟΛ}}{2}$

οπότε:

$$\frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{Q^2}{2} \Rightarrow q = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}Q$$

Εφόσον $U_E = U_B$ για πρώτη φορά μετά τη φόρτιση του πυκνωτή $q = +\frac{\sqrt{2}}{2}Q = \frac{\sqrt{2}}{2}8\cdot 10^{-5} \to q=4\sqrt{2}\cdot 10^{-5}c$

Η γωνιακή συχνότητα της ταλάντωσης είναι:

$$ω = \frac{2π}{T} = \frac{2π}{2π\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-8}}} \Rightarrow ω = 10^4 \ r/s$$

Από τη χρονική εξίσωση του φορτίου βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που ζητάμε

$$q = Q\,συν(ωt+φ_o)$$

Με αντικατάσταση των μεγεθών $Q=8\cdot10^{-5}c$, $ω=10^4 r/s$, $φ_o=0$ προκύπτει

$$q = 8\cdot 10^{-5}\,συν10^4t \quad (1)$$

Η (1) με $q = 4\sqrt{2}\cdot 10^{-5}$ γίνεται:

$$4\sqrt{2}\cdot 10^{-5} = 8\cdot 10^{-5}συν10^4t \Rightarrow συν10^4t = \frac{\sqrt{2}}{2} = συν\frac{π}{4} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 10^4t_1 = 2κπ + \frac{π}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{π}{4}\cdot 10^{-4}s \ (οπου\ κ=0) \\ 10^4t_2 = 2κπ - \frac{π}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{7π}{4}\cdot 10^{-4}s \ (οπου\ κ=1) \end{cases}$$

Αφού θέλουμε για πρώτη φορά η ενέργεια του ηλεκτρικού πεδίου να γίνει ίση με την ενέργεια του μαγνητικού επιλέγουμε την μικρότερη τιμή του χρόνου.

Άρα $t_1 = \frac{π}{4}\cdot 10^{-4}s$

ΙΙ. Λόγω μεταβολής της έντασης του ρεύματος στα άκρα του πηνίου αναπτύσσεται Η.Ε.Δ. λόγω αυτεπαγωγής.

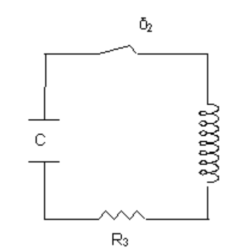
$E_{επ} = -L\frac{di}{dt}$ οπότε $\frac{di}{dt} = -\frac{E_{επ}}{L}$ (2)

όμως $V_L = E_{επ} = V_C = \frac{q}{C}$

Άρα $(2) \Rightarrow \frac{di}{dt} = -\frac{q}{LC}$ (3)

Αντικαθιστώντας στην (3) το $q = 4\sqrt{2}\cdot 10^{-5}c$ έχουμε: $\frac{di}{dt} = -4\sqrt{2}\cdot 10^3 A/s$

Β.



Βρίσκουμε το χρόνο που απαιτείται ώστε το πλάτος του φορτίου να γίνει $Q=Q_0/4$.

$Q = Q_0\cdot e^{-4\ln2\cdot t}$ (1) όπου $Q = \frac{Q_0}{4}$ (2)

Από την (1) και (2) προκύπτει:

$$\frac{Q_0}{4} = Q_0 e^{-4\ln2\cdot t} \Rightarrow \frac{1}{4} = e^{-4\ln2\cdot t} \Rightarrow e^{4\ln2\cdot t} = 4 \Rightarrow \ln e^{4\ln2\cdot t} = \ln4$$

$$\Rightarrow 4\ln2\cdot t = 2\ln2 \Rightarrow t = \frac{2}{4} = 0,5s$$

Μέχρι τη χρονική στιγμή t=0,5s το κύκλωμα έχει εκτελέσει N ηλεκτρικές ταλαντώσεις, όπου:

$N = \frac{t}{T} = \frac{0,5}{10^{-1}} \Rightarrow N = 5$ ηλεκτρικές ταλαντώσεις

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ