

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1ο ΘΕΜΑ

Δείξτε ότι για κάθε $z,w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι:

$|z+3w| + |2z+w| + |4z+3w| \leq 6|z+w| + 3|w| + |z|$

2ο ΘΕΜΑ

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $z \neq 0$ και $|2z-i|=|z-2i|$. Δείξτε ότι

α) $|z|=1$ β) $w=z+\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ γ) $4 \leq |z-3-4i| \leq 6$

3ο ΘΕΜΑ

Να βρεθούν τα όρια α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

4ο ΘΕΜΑ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f^2(x) \leq f(x) \cdot f(10-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η f δεν αντιστρέφεται.

5ο ΘΕΜΑ

Έστω $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση συνεχής τέτοια ώστε $(f \circ f)(x)=x$, $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

6ο ΘΕΜΑ

Έστω $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x))=x^2-x+1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $f(1)=1$.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$|z+3w| = |(z+w)+2w| \leq |z+w| + 2|w|$

$|2z+w| = |(z+w)+z| \leq |z+w| + |z|$

$|4z+3w| = |4z+4w-w| = |4(z+w)-w| \leq 4|z+w| + |w|$

προσθέτω κατά μέλη και έχω

$|z+3w| + |2z+w| + |4z+3w| \leq 6|z+w| + 3|w| + |z|$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Είναι $|2z-i|=|z-2i| \Leftrightarrow |2z-i|^2=|z-2i|^2 \Leftrightarrow$

$(2z-i)(2\bar{z}+i) = (z-2i)(\bar{z}+2i)$
 $\Leftrightarrow 4z\bar{z} + 2zi - 2\bar{z}i - i^2 = z\bar{z} + 2zi - 2i\bar{z} - 4i^2$

$\Leftrightarrow 3z\bar{z} = 3 \Leftrightarrow |z|=1$

β) Αφού $|z|=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{\bar{z}}$ άρα

$w=z+\frac{1}{z}=\frac{1}{z}+\bar{z}=\bar{w} \Leftrightarrow w \in \mathbb{R}$

γ) $|z-3-4i|=|z-(3+4i)|$

Από τριγωνική ανισότητα

$||z|-|3+4i|| \leq |z-(3+4i)| \leq |z|+|3+4i|$

$|1-5| \leq |z-3-4i| \leq 1+5 \Leftrightarrow 4 \leq |z-3-4i| \leq 6$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α)

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}=y\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\eta \mu y}{y} = 1$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right) = ;$

Είναι $\left|\eta \mu \frac{1}{x}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right| \leq |x| \Leftrightarrow -|x| \leq x \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|$

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ άρα από κριτήριο παρεμ-

βολής είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right) = 0$

γ) Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) = +\infty$ οπότε

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1+e^{\frac{1}{x}}\right) = 1$
Επίσης άρα οπότε

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η σχέση ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και για $x=0$, $x=10$

οπότε έχουμε

$\left. \begin{matrix} f^2(0) \leq f(0) \cdot f(10) \\ f^2(10) \leq f(10) \cdot f(0) \end{matrix} \right\} (+) \Rightarrow f^2(0) + f^2(10) - 2f(0) \cdot f(10) \leq 0$

$\Rightarrow (f(0) - f(10))^2 \leq 0$

άρα $f(0) - f(10) = 0 \Leftrightarrow f(0) = f(10)$ οπότε είναι $0 \neq 10$ και

$f(0) = f(10)$
άρα η f δεν είναι 1-1 οπότε και μη αντιστρέψιμη.

ΛΥΣΗ 5ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω ότι $f(x) \neq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε $f(x) > x$ ή $f(x) < x$
- Αν $f(x) > x$ είναι $f(f(x)) > f(x) > x$ (Ατοπο)
- Αν $f(x) < x$ τότε $f(f(x)) < f(x) < x$ (Ατοπο)
άρα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x_0) = x_0$

ΛΥΣΗ 6ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Για $x=1$ έχουμε $f(f(1))=1$ (1) και για $x=f(1)$ έχουμε
 $f(f(f(1)))=f^2(1) - f(1)+1 \Leftrightarrow (1) \quad f(1)=f^2(1) - f(1) + 1$

$\Leftrightarrow f^2(1) - 2f(1) + 1 = 0 \Leftrightarrow (f(1)-1)^2 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΣΤΟΝ ΠΕΙΡΑΙΑ