ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1º ΘΕΜΑ

Έστω g παραγωγίσιμη στο R και $f(x) = \int_1^{2x+1} g(2x-t)dt$

Δείξτε ότι: α) $f''(x) + f'(x) = 2\left[g(2x-1) + 2g'(2x-1)\right]$

β) Αν η γραφική της g βρίσκεται πάνω από τον x'x και η g είναι γνησίως αύξουσα στο R να δείξετε ότι η $h(x) = f'(x) + f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

2º ΘΕΜΑ

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R που ικανοποιεί τις σχέσεις $f(x) \neq 0$ και $\int_2^x e^t \cdot f(t) \cdot dt \geq x-2$ για κάθε $x \in R$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(2) = \frac{1}{e^2}$

β) $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

γ) Η εξίσωση f(x)=x έχει μια τουλάχιστον ρίζα στι (0,2)

δ) Αν οι μιγαδικοί z ικανοποιούν την ισότητα $|z-2e^2 f(2)i| = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του z και στη συνέχεια να βρείτε το μεγαλύτερο και μικρότερο μέτρο του z.

3º ΘΕΜΑ

Έστω η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x) = 3\int_0^x t^2 \cdot e^{-f(t)}dt, \quad x > -1$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη

β) Να βρεθεί ο τύπος της f

γ) Να βρεθεί το σύνολο των τιμών της f

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) θέτω u=2x-t, άρα $du = (2x-t)'dt$

$$du = -du \Leftrightarrow -du = dt$$

Για t=1: u=2x-1

Για t=2x+1: u=-1

Οπότε

$$f(x) = \int_1^{2x+1} g(2x-t)dt = -\int_{2x-1}^{-1} g(u)du = \int_{-1}^{2x-1} g(u)du$$

Άρα

$$f'(x) = \left(\int_{-1}^{2x-1} g(u)du\right)' = g(2x-1)\,(2x-1)' = 2g(2x-1) \quad (1)$$

και $f''(x) = 2g'(2x-1)\,(2x-1)' = 4g'(2x-1) \quad (2)$

Προσθέτω κατά μέλη τις (1), (2)

$$\Rightarrow f'(x) + f''(x) = 2g(2x-1) + 4g'(2x-1) =$$

$$2[g(2x-1) + 2g'(2x-1)]$$

β) Η h είναι παραγωγίσιμη στο R ως άθροισμα παραγωγισίμων και είναι $h'(x) = \left(f'(x) + f(x)\right)' = f''(x) + f'(x) =$

$$2\left[g(2x-1) + 2g'(2x-1)\right] \quad (3)$$

Η Cg βρίσκεται πάνω από τον άξονα x'x άρα g(x)>0, για κάθε $x \in R$ οπότε g(2x-1)>0. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο R άρα $g'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in R$, οπότε και $g'(2x-1) \geq 0$

Άρα η $h'(x) > 0$, για κάθε $x \in R$, άρα η h γνησίως αύξουσα στο R.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) $\int_2^x e^t f(t)dt - x + 2 \geq 0$ θεωρώ $h(x) = \int_2^x e^t f(t)dt - x + 2$

άρα ισχύει $h(x) \geq 0$ $x \in R$, παρατηρώ ότι h(2)=0, άρα

$h(x) \geq h(2),\ x \in R$ και από θεώρημα Fermat $h'(2)=0$ (1)

(x_0=2 εσωτερικό σημείο Dh, x_0=2 θέση ακρότατου, h παρ/μη στο x_0=2)

Είναι

$$h'(x) = \left(\int_2^x e^t f(t)dt - x + 2\right)' = e^x f(x) - 1$$

Οπότε $h'(2) = 0 \Leftrightarrow e^2 f(2) = 1 \Leftrightarrow f(2) = \frac{1}{e^2}$

β) f συνεχής στο R $f(x) \neq 0,\ x \in R$ άρα η f διατηρεί πρόσημο στο R, επειδή $f(2) = \frac{1}{e^2} > 0$ άρα f(x)>0, $x \in R$

γ) θεωρώ g(x)=f(x)-x. Εφαρμόζω για την g τις υποθέσεις του θ. Bolzano στο [0,2]:

g συνεχής στο [0,2] ως διαφορά συνεχών

g(0)=f(0)-0=f(0)>0

$g(2) = f(2) - 2 = \frac{1}{e^2} - 2 < 0$

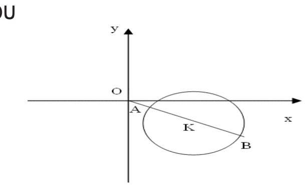
Άρα g(0)· g(2)<0, οπότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της g(x) στο (0,2).

δ) $|z-2e^2 f(2)+i| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \left|z-2e^2\frac{1}{e^2}+i\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow |z-2+i| = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |z-(2-i)| = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,-1) και ακτίνα $\rho = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Φέρω τη διακεντρική ευθεία ΟΚ που τέμνει τον κύκλο στα Α, Β



$$|z|\min = OK - \rho = \sqrt{2^2+(-1)^2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$|z|\max = OB = OK + \rho = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Αρκεί να δείξω ότι η $g(t) = t^2 \cdot e^{-f(t)}$ είναι συνεχής στο $(-1, +\infty)$

t^2 συνεχής ως πολυωνυμική

$e^{-f(t)}$ συνεχής ως σύνθεση συνεχών

άρα $t^2 \cdot e^{-f(t)}$ συνεχής ως γινόμενο συνεχών

οπότε η $f(x) = 3\int_0^x t^2 \cdot e^{-f(t)}dt$, είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$

β) Παραγωγίζουμε και τα 2 μέλη

$$f'(x) = \left(3\int_0^x t^2 \cdot e^{-f(t)}dt\right)' \Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-f(x)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 3x^2 \cdot \frac{1}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow f'(x) \cdot e^{f(x)} = 3x^2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)' = (x^3)'$$

Άρα $e^{f(x)} = x^3 + c$ οπότε $f(x) = \ln(x^3+c)$

Για x=0:

$$f(0) = 3\int_0^0 t^2 \cdot e^{-f(t)}dt \Leftrightarrow f(0) = 0$$

άρα ln(0+c)=0 ⇔ c=1 οπότε $f(x) = \ln(x^3+1)$

γ) Εξετάζω την f ως προς την μονοτονία

$$f'(x) = [\ln(x^3+1)]' = \frac{1}{x^3+1}(x^3+1)' = \frac{3x^2}{x^3+1} \geq 0$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ οπότε

$$f(A) = \left(\lim_{x \to -1^+} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right) = (-\infty, +\infty) = R$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ