ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Για μια συνεχή συνάρτηση f με x > 1 ισχύει:

$$f(x^2+1) = x^2 - x + 2 \quad (1)$$

Να βρεθούν: (α) $\lim_{x\to 5} f(x)$

(β) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(5,f(5)).

2ο ΘΕΜΑ

Έστω X μια ποσοτική μεταβλητή ως προς την οποία εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν και $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ οι παρατηρήσεις με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=4x^2-(\bar{x})^3x+10s \quad x\in R$. Αν η g παρουσιάζει για x=1 ελάχιστο ίσο με g(1)= -1 τότε:
(α) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.
(β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές
(γ) Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε μια παρατήρηση ανάμεσα στο 1,7 και στο 2,3 αν η κατανομή είναι κανονική;
(δ) Αυξάνουμε κάθε παρατήρηση κατά την ίδια ποσότητα λ>0. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του λ ώστε το δείγμα να είναι ομογενές.

3ο ΘΕΜΑ

Δίνονται Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε: $A,B \neq \varnothing$ και $A,B \neq \Omega$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x\to 0} \dfrac{P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)\,x}{x^2+[P(A)+P(B)]\,x}$

4ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f (x)= 3x³ +αx² +12x - 4 με $x\in R$ και $\alpha\in R$
ι) Να βρείτε για ποια τιμή του α είναι $\lim_{x\to 2} f(x) = 40$
ιι) Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα (ι), να υπολογίσετε την f'(x).
ιιι) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
ιν) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης έχει ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

(α) Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση για κάθε $x\in R$ θα ισχύει: $\lim_{x\to 5} f(x) = f(5)$

Για x=2 η σχέση (1) γίνεται: $f(2^2+1)=2^2-2+2 \Leftrightarrow f(5)=4$

Επομένως: $\lim_{x\to 5} f(x) = 4$

(β) $[f(x^2+1)]' = (x^2-x+2)' \Leftrightarrow f'(x^2+1)\cdot(x^2+1)' = 2x-1 \Leftrightarrow$

$$f'(x^2+1)\cdot 2x = 2x-1 \Leftrightarrow f'(x^2+1) = \frac{2x-1}{2x}$$

Για x=2 έχουμε: $f'(2^2+1) = \dfrac{2\cdot 2-1}{2\cdot 2}$ άρα $f'(5) = \dfrac{3}{4}$

και η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y - f(5) = f'(5)\,(x-5) \Leftrightarrow y - 4 = \frac{3}{4}(x-5) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

(α) $g'(x) = 8x - (\bar{x})^3$

Η g παρουσιάζει ελάχιστο για x=1 άρα g'(1)=0 οπότε: $8-(\bar{x})^3 = 0 \Leftrightarrow \bar{x} = 2$ και η ελάχιστη τιμή είναι g(1)= -1, οπότε: $4\cdot 1^2 - 2^3\cdot 1 + 1s = -1 \Leftrightarrow -4+10s = -1 \Leftrightarrow s = \dfrac{3}{10}$

(β)

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\frac{3}{10}}{2} = \frac{3}{20} > \frac{2}{20} = 0{,}1$$

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
(γ) Παρατηρούμε ότι $[\bar{x}-s, \bar{x}+s] = [1{,}7, 2{,}3]$ και επειδή η κατανομή είναι κανονική η πιθανότητα μια παρατήρηση να ανήκει στο παραπάνω διάστημα είναι 68%.

(δ) Αν οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά την ίδια ποσότητα λ>0 τότε η μέση τιμή του δείγματος θα γίνει $\bar{x}+\lambda$ ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμένει αμετάβλητη.
Το δείγμα είναι ομοιογενές όταν:

$$CV \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}+\lambda} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{10}}{2+\lambda} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{3}{20+10\lambda} \le 0{,}1$$

$$\Leftrightarrow 3 \le 2+\lambda \Leftrightarrow \lambda \ge 1$$

Άρα η μικρότερη τιμή του λ είναι 1.

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)\,x}{x^2+[P(A)+P(B)]\,x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,[P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)]}{x\cdot[x+P(A)+P(B)]} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{x+P(A)+P(B)} = \frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{P(A)+P(B)} =$$

$$\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)}{P(A)+P(B)} = 1$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

ι)

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 40 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2}(3x^3+\alpha x^2+12x-4) = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\cdot 2^3 + \alpha\cdot 2^2 + 12\cdot 2 - 4 = 40 \Leftrightarrow 24 + 4\alpha + 24 - 4 = 40$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1$$

ιι) Για α= -1 η συνάρτηση γράφεται: f(x)=3x³ - x² +12x - 4 και f'(x)=9x² - 2x +12
ιιι) f'(x)=0 ⇔ 9x² -2x +12=0 ⇔ Δ=4 - 432= -428 <0.
Δηλαδή η f'(x) =0 δεν έχει ρίζες γιατί η διακρίνουσα είναι αρνητική, οπότε η f'(x) έχει το πρόσημο του συντελεστή του x² δηλαδή είναι f'(x)>0, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in R$ και δεν αλλάζει μονοτονία, άρα δεν έχει ακρότατα.
ιν) Αρκεί να βρούμε για ποιο x η f'(x) παίρνει ελάχιστη τιμή.
Έχουμε: $f''(x) = (9x^2-2x+12)' = 18x-2$

$$f''(x) \ge 0 \Leftrightarrow 18x-2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$$

	$-\infty$	$1/9$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	↘		↗
		ελάχιστο	

Άρα για $x = \dfrac{1}{9}$ η f' έχει ελάχιστη τιμή. Συνεπώς το ζητούμενο σημείο έχει συντεταγμένες $\left(\dfrac{1}{9}, f\left(\dfrac{1}{9}\right)\right)$ δηλαδή $\left(\dfrac{1}{9}, \dfrac{650}{243}\right)$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ