

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1^ο ΘΕΜΑ

$f(x) = \frac{\ln x - \ln \alpha}{x - \alpha}$ να δειχθεί ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, \alpha)$.

2^ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = f'(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) < f'(x)$.
Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \leq e^x$.

3^ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x)}{e^{x^2}}$.

4^ο ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με

f' συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot e^x dx = 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot e^x dx = 0$

- α) Δείξτε ότι $f(\alpha) \cdot e^{\alpha} = f(\beta) \cdot e^{\beta}$
β) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta): f(x_0) = -f'(x_0)$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με

$$f'(x) = \frac{(\ln x - \ln \alpha)' \cdot (x - \alpha) - (x - \alpha)' \cdot (\ln x - \ln \alpha)}{(x - \alpha)^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (x - \alpha) - (\ln x - \ln \alpha)}{(x - \alpha)^2} = \frac{1 - \frac{\alpha}{x} - \ln x + \ln \alpha}{(x - \alpha)^2}$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το πρόσημο του αριθμητή. Θεωρούμε και συνάρτηση g με $g(x) = 1 - \frac{\alpha}{x} - \ln x + \ln \alpha$, $x \in (0, \alpha)$

Η g είναι συνεχής στο $(0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με

$$g'(x) = 0 + \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\alpha - x}{x^2}$$

Για κάθε $x \in (0, \alpha)$ είναι $g'(x) = \frac{\alpha - x}{x^2} > 0$ και έτσι η g είναι

γνήσια αύξουσα στο $(0, \alpha]$ άρα $g_{\max} = g(\alpha) = 0$ και ακόμη $g(x) < g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Οπότε $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \alpha)^2} < 0$ άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα

στο $(0, \alpha)$.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$f(x) \leq e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} \leq \frac{e^x}{e^x} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} - 1 \leq 0 \quad (:)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - 1$, $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο της

$$\Phi(x) = f'(x) - f(x). \text{ Είναι } \Phi'(x) = f''(x) - f'(x) \Leftrightarrow \Phi'(x) < 0$$

(διότι $f''(x) < f'(x)$). Άρα η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Για $x=0$ είναι $\Phi(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 1 = 0$

Συνοπτικά

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Φ'			
Φ		+	-

$$\text{Άρα } g'(x) = \frac{\Phi(x)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$$

Οπότε έχουμε συνοπτικά τον πίνακα

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$		max	

Για $x \leq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$

Για $x \geq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(0) \leq 0$ οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η συνάρτηση $\frac{x \cdot f(x)}{e^{x^2}}$ είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$.

Για το όριο στο $+\infty$, έχουμε ότι για κάθε $x > 0$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0, x]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f(x) - f(0) = x \cdot f'(\xi)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = f(0) + x f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + x \cdot e^{\xi^2}$$

Όμως $e^{\xi^2} > e^0$ άρα ισχύει ότι

$$f(x) = f(0) + x e^{\xi^2} > f(0) + x e^0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) + x$$

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) + x) = +\infty \text{ άρα και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x) + f(x)}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f'(x) + x f''(x)}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}}$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{(2 + 4x^2)e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + 2x^2}{2 + 4x^2} = \frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot e^x dx = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^x]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot (e^x)' dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) \cdot e^{\beta} - f(\alpha) \cdot e^{\alpha} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot e^x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) \cdot e^{\beta} - f(\alpha) \cdot e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow f(\beta) \cdot e^{\beta} = f(\alpha) \cdot e^{\alpha}$$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^x$, $x \in [\alpha, \beta]$

- g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών

- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f'(x)e^x + f(x)e^x$

- $g(\alpha) = g(\beta)$ (από (α) ερώτημα)

άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει

$$x_0 \in (\alpha, \beta): g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)e^{x_0} + f(x_0)e^{x_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -f(x_0)$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ