

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1^o ΘΕΜΑ

$f(x) = \frac{\ln x - \ln \alpha}{x - \alpha}$ να δειχθεί ότι η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $(0, \alpha)$.

2^o ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f: R \rightarrow R$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f(0) = f'(0) = 1$ και για κάθε $x \in R$ ισχύει $f''(x) < f'(x)$. Δείξτε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύει $f(x) \leq e^x$.

3^o ΘΕΜΑ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ με $f'(x) = e^{x^2}$ για κάθε $x \in R$ να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot f(x)}{e^{x^2}}$.

4^o ΘΕΜΑ

Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow R$ παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με f' συνεχή στο $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot e^x dx = 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f'(x) \cdot e^x dx = 0$

α) Δείξτε ότι $f(\alpha) \cdot e^{\alpha} = f(\beta) \cdot e^{\beta}$
 β) Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$: $f(x_0) = -f'(x_0)$

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με

$$f'(x) = \frac{(\ln x - \ln \alpha)' \cdot (x - \alpha) - (x - \alpha)' (\ln x - \ln \alpha)}{(x - \alpha)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} \cdot (x - \alpha) - (\ln x - \ln \alpha)}{(x - \alpha)^2} = \frac{1 - \frac{\alpha}{x} - \ln x + \ln \alpha}{(x - \alpha)^2}$$

Το πρόσημο της παραγώγου εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από το πρόσημο του αριθμητή. Θεωρούμε και συνάρτηση g με $g(x) = 1 - \frac{\alpha}{x} - \ln x + \ln \alpha$, $x \in (0, \alpha)$

Η g είναι συνεχής στο $(0, \alpha]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, \alpha)$ με

$$g'(x) = 0 + \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{\alpha - x}{x^2}$$

Για κάθε $x \in (0, \alpha)$ είναι $g'(x) = \frac{\alpha - x}{x^2} > 0$ και έτσι η g είναι

γνήσια αύξουσα στο $(0, \alpha]$ άρα $g_{max} = g(\alpha) = 0$ και ακόμη $g(x) < g(\alpha) \Leftrightarrow g(x) < 0$.

Οπότε $f'(x) = \frac{g(x)}{(x - \alpha)^2} < 0$ άρα η g είναι γνήσια φθίνουσα

στο $(0, \alpha)$.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$f(x) \leq e^x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(0)}{e^x - 1} - 1 \leq 0 \quad (;$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - 1$, $x \in R$ έχουμε:

$$g'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}, \quad x \in R$$

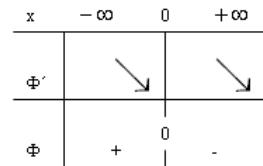
Το πρόσημο της g' εξαρτάται από το πρόσημο της

$$\Phi(x) = f'(x) - f(x). \quad \text{Είναι } \Phi'(x) = f''(x) - f'(x) \Leftrightarrow \Phi'(x) < 0$$

(διότι $f''(x) < f'(x)$). Άρα η Φ είναι γνησίως φθίνουσα στο R .

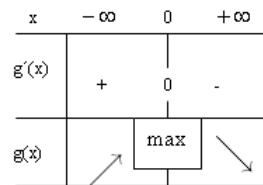
Για $x=0$ είναι $\Phi(0) = f'(0) - f(0) = 1 - 1 = 0$

Συνοπτικά



Άρα $g'(x) = \frac{\Phi(x)}{e^x} = 0 \Leftrightarrow \Phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Οπότε έχουμε συνοπτικά τον πίνακα



Για $x \leq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(x) \leq 0$

Για $x \geq 0$ είναι $g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow g(0) \leq 0$ οπότε για κάθε $x \in R$

$$g(x) \leq g(0) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{e^x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow f(x) \leq e^x, \quad x \in R$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Η συνάρτηση $\frac{x \cdot f(x)}{e^{x^2}}$ είναι ορισμένη στο R .

Για το όριο στο $+\infty$, έχουμε ότι για κάθε $x > 0$, η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του ΘΜΤ στο $[0, x]$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow f(x) - f(0) = x \cdot f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + x f'(\xi) \Leftrightarrow f(x) = f(0) + x \cdot e^{\xi^2}$

Όμως $e^{\xi^2} > e^0$ άρα ισχύει ότι

$$f(x) = f(0) + x e^{\xi^2} > f(0) + x e^0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) + x$$

Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(0) + x) = +\infty$ άρα και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f'(x) + f(x)}{2x e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f'(x) + x f''(x)}{2e^{x^2} + 4x^2 e^{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}}{(2+4x^2)e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2+2x^2}{2+4x^2} = \frac{1}{2}$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot e^x dx = 0 \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^x]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot (e^x)' dx = 0$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) \cdot e^{\beta} - f(\alpha) \cdot e^{\alpha} - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cdot e^x dx = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(\beta) \cdot e^{\beta} - f(\alpha) \cdot e^{\alpha} = 0 \Leftrightarrow f(\beta) \cdot e^{\beta} = f(\alpha) \cdot e^{\alpha}$$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot e^x$, $x \in [\alpha, \beta]$

- g συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως γινόμενο συνεχών

- g παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f'(x) \cdot e^x + f(x) \cdot e^x$

- $g(\alpha) = g(\beta)$ (από (α) ερώτημα)

άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει

$x_0 \in (\alpha, \beta)$: $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) \cdot e^{x_0} + f(x_0) \cdot e^{x_0} = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) + f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = -f(x_0)$$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ