

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

1^ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.
β) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .
γ) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 1$

2^ο ΘΕΜΑ

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η f' είναι 1-1. Να δείξετε ότι η κάθε εφαπτομένη της C_f έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με την C_f .

3^ο ΘΕΜΑ

α) Αν για τον μιγαδικό Z ισχύει $e^{z-i}x \geq |z+1| \cdot x+1$, για κάθε

$x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του Z .
β) Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α, β ώστε η C_f να είχε ασύμπτωτη στο $+\infty$, στο γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (α) όπου $f(x) = \frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{x+1}$

γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ C_f , του άξονα $x'x$ και ευθειών $x=0$ και $x=2$.

4^ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=2008$. Αν ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f(x) \cdot g(x) = e^{2x}$ και τότε $f'(x) \cdot g'(x) = e^{2x}$ να βρεθούν οι τύποι των f, g .

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Θα πρέπει $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$, άρα $A = (0, +\infty)$.
Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{e^x - 1} (e^x - 1)' = \frac{e^x - 1}{e^x - 1} + \frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1} > 0$$

για κάθε $x > 0$, άρα f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.
β) f γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

γ) Παρατηρώ ότι το $1 \in f(A)$ άρα η εξίσωση $f(x) = 1$ έχει μια

τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα μοναδική.

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Έστω (ε) μια τυχαία εφαπτομένη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$, τότε (ε): $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Οι τετμημένες των σημείων

τομής της (ε) και της C_f προκύπτουν από τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ (1) η οποία έχει προφα

νή λύση την $x = x_0$. Έστω ότι έχει και δεύτερη λύση x_1 με $x_1 \neq x_0$, τότε ισχύει

$$f(x_1) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0) \quad (2)$$

Από Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_0]$ ή $[x_0, x_1]$ υπάρχει $\xi \in (x_1, x_0)$ ή (x_0, x_1) ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Από (2) προκύπτει ότι $f'(\xi) = f'(x_0) \Rightarrow \xi = x_0$ (f' 1-1)

Άτοπο αφού $\xi \in (x_1, x_0)$ ή (x_0, x_1) .

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Δίνεται ότι $e^{z-i}x \geq |z+1| \cdot x+1 \Leftrightarrow e^{z-i}x - |z+1| \cdot x - 1 \geq 0$.

Θεωρούμε ότι $g(x) = e^{z-i}x - |z+1| \cdot x - 1, x \in \mathbb{R}$, άρα ισχύει

$$g(x) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0)$$

Άρα η g εμφανίζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$, είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ οπότε από Θ. Fermat ισχύει $g'(0) = 0$.
Άρα $g'(x) = e^{z-i} \cdot |z-1| - |z+1|$ οπότε

$$g'(0) = 0 \Leftrightarrow |z-i| = |z+1| \quad (z = x+yi)$$

$$\Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x+1) + yi| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2 - 2y+1 = x^2+2x+1+y^2 \Leftrightarrow y = -x$$

β) Η $y = -x$ είναι είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda = -1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0$

Οπότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{x^2 + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2}{x^2} = \alpha = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha x^2 + 2\beta x - 3}{x+x} + x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 2\beta x - 3 + x^2 + x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2\beta+1)x-3}{x+1} =$$

$$2\beta+1 = 0 \Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα η } f(x) = \frac{-x^2 - x - 3}{x+1} = -\frac{x^2 + x + 3}{x+1}$$

γ) Παρατηρώ ότι $f(x) = -\frac{x^2 + x + 3}{x+1} < 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$

$$\text{άρα } E(\Omega) = - \int_0^2 -\frac{x^2+x+3}{x+1} dx = \int_0^2 \frac{x(x+1)+3}{x+1} dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x + \frac{3}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3 \cdot \ln(x+1) \right]_0^2 = 2 + 3\ln 3$$

ΛΥΣΗ 4ου ΘΕΜΑΤΟΣ

Ισχύει ότι $f(x) \cdot g(x) = e^{2x} \neq 0$ άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f(x) \neq 0 \text{ και } g(x) \neq 0.$$

Οπότε $f(x) \cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)}$ συνεπώς

$$g'(x) = \frac{(e^{2x})' \cdot f(x) - e^{2x} \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{2e^{2x} \cdot f(x) - e^{2x} \cdot f'(x)}{f^2(x)} \quad (1)$$

Η σχέση $f'(x) \cdot g'(x) = e^{2x}$ λόγω της (1) γράφεται

$$f'(x) \cdot \frac{2e^{2x} \cdot f(x) - e^{2x} \cdot f'(x)}{f^2(x)} = e^{2x} \Leftrightarrow f'(x) \cdot \frac{2f(x) - f'(x)}{f^2(x)} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2f(x) f'(x) - [f'(x)]^2 = f^2(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + [f'(x)]^2 - 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow [f(x) - f'(x)]^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f'(x) \Leftrightarrow f(x) = C \cdot e^x, x \in \mathbb{R} \quad \text{είναι}$$

$$f(0) = 2008 \Leftrightarrow C \cdot e^0 = 2008 \Leftrightarrow C = 2008.$$

$$\text{Άρα } f(x) = 2008 e^x.$$

Οπότε $f(x) \cdot g(x) = e^{2x} \Leftrightarrow g(x) = \frac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow g(x) = \frac{e^x}{2008}, x \in \mathbb{R}$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
ΣΤΟΝ ΠΕΙΡΑΙΑ