ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Αν για τα ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: P(A)>0,6 και P(B)=0,4

A)Να εξετάσετε αν τα A,B είναι ασυμβίβαστα.

B)Αν $\rho\in R$ ρίζα της εξίσωσης

$$x^2+2P(A\cap B)\cdot x+P(A)\cdot P(B)=0$$

να δειχθεί ότι $0>\rho\geq -0,4$

Γ)Να δειχθεί ότι $0,2<P(A-B)$

2ο ΘΕΜΑ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ,f,g με $f(1)=f'(1)=1$ και φ(x)=f(g(x)) με g(x)=lnx+x, x>0.

A)Να δείξετε ότι:g(1)=φ(1)=1 και $g'(1)=\varphi'(1)=2$

B) Να εξετάσετε αν η g(x) έχει ακρότατα στο διάστημα $(0,+\infty)$

Γ) Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)+(h+1)-g(1)}{h}$$

Δ) ι) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1, ε_2 των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους A(1,φ(1)) και B(1,f(1)) αντίστοιχα.

ιι) Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα xx'.

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4\cdot s\cdot x^2-2\overline{x}\cdot x+13,\ \ x\in R$ όπου $\overline{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δειγματικού μεγέθους ν $(\text{με } x\neq 0 \text{ και } s\neq 0)$.Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο A(1,f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία y=2009 τότε:

A) Να βρείτε την $f'(x)$

B) Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο

Δ) Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:

ι) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος

ιι) Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό κατά το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια.

ιιι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο A.

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

A) P(A)>0,6 και P(B)=0,4. Αν τα A,B ήταν ασυμβίβαστα θα ίσχυε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)>0,6+0,4=1$ άτοπο αφού

$$0\leq P(A\cup B)\leq 1$$

B)$\rho\in R$ ρίζα της $x^2+2P(A\cap B)X+P(A)\cdot P(B)=0\ (1)$

$$\Delta=\left[2P(A\cap B)\right]^2-4\cdot 1\cdot P(A)\cdot P(B)=$$

$$=4\left[P(A\cap B)\right]^2-4P(A)P(B)=4\left[\left[P(A\cap B)\right]^2-P(A)\,P(B)\right]$$

$A\cap B\subseteq A$ και $A\cap B\subseteq B$ άρα

$$\left.\begin{matrix}P(A\cap B)\leq P(A)\\ P(A\cap B)\leq P(B)\end{matrix}\right\}\Rightarrow [P(A\cap B)]^2\leq P(A)\cdot P(B)$$

Άρα $\Delta\leq 0$ και επειδή γνωρίζουμε ότι η (1) έχει ρίζα ρ, άρα $\Delta=0\Leftrightarrow[P(A\cap B)]^2=P(A)\cdot P(B)$ και $\rho=-\dfrac{2P(A\cap B)}{2\cdot 1}=-P(A\cap B)$

$$0<P(A\cap B)\leq 0,4\Leftrightarrow 0>-P(A\cap B)\geq -0,4$$

Γ) $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$0<P(A\cap B)\leq 0,4\ ,\ 0>-P(A\cap B)\geq -0,4$

$$P(A)>P(A-B)\geq P(A)-0,4>0,6-0,4=0,2$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

A) g(1)=ln1+1=0+1=1

$g'(x)=\dfrac{1}{x}+1$ άρα $g'(1)=\dfrac{1}{1}+1=2$

φ(1)=f(g(1))=f(1)=1 άρα g(1)=φ(1)=1

$\phi'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$\phi'(1)=f'(g(1))\cdot g'(1)\Leftrightarrow\phi'(1)=f'(1)\cdot g'(1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\phi'(1)=1\cdot g'(1)\Leftrightarrow\phi'(1)=g'(1)$ άρα $\phi'(1)=g'(1)=2$

B) $g'(x)=\dfrac{1}{x}+1$ δηλαδή $g'(x)>0$ για x>0

άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ επομένως δεν έχει ακρότατα.

Γ)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(h+1)-(h+1)-g(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(h+1)-g(1)}{h}=$$

$$=g'(1)=2$$

Δ) ι) για την (ε_1) έχουμε: φ(1)=1 και $\varphi'(1)=2$ άρα

Αν (ε_1):y=λx+β τότε $\lambda=\varphi'(1)=2$

οπότε (ε_1):y=2x+β όμως το A(1,φ(1)) ανήκει στην (ε_1) άρα:

φ(1)=2+β ⇔ 1=2+β ⇔ β= -1.

Επομένως (ε_1):y=2x-1

Για την (ε_2) έχουμε: $f(1)=f'(1)=1$

Αν (ε_2):y=λx+β τότε $\lambda=f'(1)=1$

οπότε (ε_2):y=x+β όμως το B(1,f(1)) ανήκει στην (ε_2) άρα:

f(1)=1+β ⇔ 1=1+β ⇔ β=0.

Επομένως (ε_2):y=x

ιι) Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η (ε_2) με τον xx' τότε

$$\lambda=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow f'(1)=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow 1=\varepsilon\varphi\omega\Leftrightarrow\omega=\frac{\pi}{4}$$

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

A) $f'(x)=(4sx^2-2\overline{x}\cdot x+13)'=8s\cdot x-2\overline{x}$

B) Η εφαπτομένη στο σημείο A(1, f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία y=2009 άρα: $f'(1)=0$.

Δηλαδή

$$8s-2\overline{x}=0\Leftrightarrow 4s-\overline{x}=0\Leftrightarrow 4s=\overline{x}\ \ (1)$$

$$\Leftrightarrow\frac{s}{\overline{x}}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow CV=0,25=25\%$$

Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ) $f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 8s\cdot x-2\overline{x}\geq 0\Leftrightarrow 4s\cdot x-\overline{x}\geq 0\Leftrightarrow x\geq\dfrac{\overline{x}}{4s}$

Από την (1) προκύπτει $x\geq\dfrac{4S}{4S}\Leftrightarrow x\geq 1$

	$-\infty$	1	$+\infty$
f΄(x)	-	0	+
f(x)	↘		↗

Άρα για x=1 η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $f(1)=4s-2\overline{x}+13\ \ (2)$

Δ) ι) Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 1 άρα: f(1)=1.

Από τη (2) προκύπτει ότι: $4s-2\overline{x}+13=1\Leftrightarrow 4s-2\overline{x}=-12$ και λόγω της (1) προκύπτει

$4s-8s=-12\Leftrightarrow -4s=-12\Leftrightarrow s=3$ και $\overline{x}=12$

ιι) Θέλουμε $CV\leq 0,1\Leftrightarrow\dfrac{s}{\overline{x}+c}\leq 0,1\Leftrightarrow\dfrac{3}{12+c}\leq 0,1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\leq 1,2+0,1c\Leftrightarrow 1,8\leq 0,1c\Leftrightarrow c\geq 18$. Άρα το ελάχιστο ποσό είναι c=18.

ιιι) Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο A(1, f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία y=2009 άρα $f'(1)=0$.

Αν η εφαπτομένη είναι y=λx+β τότε λ=0 και β=f(1)=1.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο A(1, f(1)) είναι η y=1

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**