ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

1ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $x\cdot f(x) - 2x^2 = x^2 \cdot f(x) + x^3$ για κάθε $x \in R-\{1\}$.

Αν f συνεχής στο x=0 να βρεθεί το f(0)

2ο ΘΕΜΑ

Αν $\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 4$

α. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} f(x)$

β. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 2} \frac{\left(f^2(x) - 6f(x) + 5\right)(x - 2)}{(f(x) - 5)\cdot\left(\sqrt{2x} - 2\right)}$

3ο ΘΕΜΑ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 7x + 14$. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το Α(1,2) και εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Β(x_0, f(x_0)).

4ο ΘΕΜΑ

Α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + x\cdot y$ για κάθε $x,y \in R$

ι. Να βρεθεί το f(0).

ιι. Να βρεθεί η f'(x_0), αν f'(0)=0

Β. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και

$g(x) = f(-x^3 - 5\lambda x^2 - 8x),\ \lambda \in R$

ι. Να βρεθεί το $g''(x)$.

ιι. Αν f'(x) >0, για κάθε $x\in R$ να βρεθεί το $\lambda \in R$ ώστε η g να είναι γνησίως φθίνουσα στο R.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1ο ΘΕΜΑ

$x\cdot f(x) - 2x^2 = x^2 \cdot f(x) + x^3 \Leftrightarrow x^2\cdot f(x) - x\cdot f(x) = -x^3 - 2x^2 \Leftrightarrow$

$f(x)\cdot x(x-1) = -x^2(x+2) \quad (1)$

Για $x\neq 0$ και $x\neq 1$ από (1) έχουμε

$f(x) = \frac{-x^2(x+2)}{x(x-1)} = -\frac{x(x+2)}{x-1}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{x(x+2)}{x-1}\right] = -\frac{0\cdot 2}{-1} = 0$

f συνεχής στο x=0, άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \Rightarrow f(0)=0$

2ο ΘΕΜΑ

α) Θέτουμε $\frac{f(x) - 5}{x-2} = g(x)$ τότε $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$ και

f(x)=g(x) (x-2)+5

Άρα $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\left[g(x)(x-2) + 5\right] = 4\cdot 0 + 5 = 5$

β) $\lim_{x\to 2} \frac{\left[f^2(x) - 6f(x) + 5\right](x-2)}{\left[f(x) - 5\right](\sqrt{2x} - 2)}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{[f(x) - 1]\cdot[f(x) - 5]\cdot(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{[f(x) - 5]\cdot(\sqrt{2x}-2)(\sqrt{2x}+2)} =$

$\lim_{x\to 2} \frac{[f(x) - 1]\cdot(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{[f(x) - 1]\cdot(\sqrt{2x}+2)}{2}$

$\frac{(5-1)(2+2)}{2} = 8$

3ο ΘΕΜΑ

Έστω(ε) η ζητούμενη ευθεία με εξίσωση y= αx + β

$A\in(\varepsilon)$ άρα 2=α+β(1).

$f'(x) = 2x - 7,\ x\in R$

B(x_0, f(x_0)) το σημείο επαφής, άρα

$B\in(\varepsilon)$

f(x_0)=αx_0+β (2)

και $f'(x_0) = \alpha \Leftrightarrow 2x_0 - 7 = \alpha$ (3)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2x_0 - 7 = \alpha \\ x_0^2 - 7x_0 + 14 = \alpha x_0 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - \alpha \\ x_0 = \frac{\alpha+7}{2} \\ \left(\frac{\alpha+7}{2}\right)^2 - 7\cdot\frac{\alpha+7}{2} + 14 = \alpha\cdot\frac{\alpha+7}{2} + 2 - \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 - \alpha \\ x_0 = \frac{\alpha+7}{2} \\ \alpha^2 + 10\alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

Δ=100-4=96, $\alpha = -5 \pm 2\sqrt{6}$

Για $\alpha = -5 + 2\sqrt{6}$ $\beta = 7 - 2\sqrt{6}$ $y = (-5 + 2\sqrt{6})x + 7 - 2\sqrt{6}$

Για $\alpha = -5 - 2\sqrt{6}$ $\beta = 7 + 2\sqrt{6}$ $y = (-5 - 2\sqrt{6})x + 7 + 2\sqrt{6}$

4ο ΘΕΜΑ

Α. ι. $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$

Για x=y=0 f(0+0)=f(0)+f(0)+0·0 ⇔

$\Leftrightarrow f(0)=0 \quad (1)$

ιι. $f'(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = 0 \quad (2)$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0) + f(h) + x_0\cdot h - f(x_0)}{h} =$

$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(h)}{h} + x_0\right] = 0 + x_0 = x_0$ άρα f'(x_0)=x_0

Β. ι. $g'(x) = f'(-x^3 - 5\lambda x^2 - 8x)\cdot(-3x^2 - 10\lambda x - 8)$

$g''(x) = f''(-x^3 - 5\lambda x^2 - 8x)\cdot(-3x^2 - 10\lambda x - 8)^2 +$

$f'(-x^3 - 5\lambda x^2 - 8x)\cdot(-6x - 10\lambda)$

ιι. $g'(x) = f'(-x^3 - 5\lambda x^2 - 8x)\cdot(-3x^2 - 10\lambda x - 8)$, g γνησίως φθίνουσα

άρα $-3x^2 - 10\lambda x - 8 \le 0$ για κάθε $x\in R$ άρα

$\Delta \le 0 \Leftrightarrow 100\lambda^2 - 96 \le 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \le \frac{96}{100} \Leftrightarrow -\frac{4\sqrt{6}}{10} \le \lambda \le \frac{4\sqrt{6}}{10}$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ

στον ΠΕΙΡΑΙΑ