ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

1ο ΘΕΜΑ

Δίδεται ο δειγματικός χώρος Ω={1,2,......,10} ενός πειράματος τύχης. Γνωρίζουμε ότι οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω είναι ανάλογες των αντιστοίχων στοιχείων του δειγματικού χώρου Ω.
α) Να βρεθούν οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου.
β) Ποια είναι η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι: ι) άρτιος αριθμός ιι) αριθμός μεγαλύτερος του 7.

2ο ΘΕΜΑ

Το βάρος των μαθητών ενός Γυμνασίου παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα ομαδοποιημένο σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους.

ΚΛΑΣΕΙΣ	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΤΙΜΗ xi	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ vi	ΣΧΕΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ fi	ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ Ni	ΣΧΕΤΙΚΗ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ Fi
[,)					
[,)	65			30	0,60
[,)			0,10		
[,)	85				
[,)					
ΣΥΝΟΛΟ					

Αν γνωρίζουμε ότι η συχνότητα (v_3) της τρίτης κλάσης είναι ίση με την συχνότητα (v_4) της τέταρτης κλάσης και ότι το 40% των μαθητών έχει βάρος λιγότερο από 65 κιλά, να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.

3ο ΘΕΜΑ

Αν Α,Β ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύει ότι: $P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B)$ να βρεθούν τα P(A), P(B).

ΛΥΣΕΙΣ

ΛΥΣΗ 1ου ΘΕΜΑΤΟΣ

α) Αφού οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων είναι ανάλογες των αντίστοιχων στοιχείων του Ω θα ισχύει

$\frac{P(1)}{1}=\frac{P(2)}{2}=...=\frac{P(10)}{10}=\lambda$ άρα $P(1) = 1\cdot\lambda$

$P(2) = 2\cdot\lambda$

:

$P(10) = 10\cdot\lambda$

Γνωρίζουμε ότι ισχύει $P(1)+...+P(10)=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda+2\lambda+....+10\lambda=1 \Leftrightarrow \lambda\cdot(1+2+...+10)=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda\cdot\frac{(1+10)}{2}\cdot 10=1 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{55}$$

Άρα $P(1)=\frac{1}{55}, P(2)=\frac{2}{55},..., P(10)=\frac{10}{55}$

δηλαδή $P(\kappa)=\frac{\kappa}{55}$, με κ=1,….,10

β) ι) Έστω Α το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι άρτιος αριθμός, τότε Α={2,4,6,8,10}

$$P(A)=\frac{2}{55}+\frac{4}{55}+\frac{6}{55}+\frac{8}{55}+\frac{10}{55}=\frac{30}{55}$$

ιι) Έστω Β το ενδεχόμενο το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι μεγαλύτερο του 7, τότε Β={8,9,10} και

$$P(B)=\frac{8}{55}+\frac{9}{55}+\frac{10}{55}=\frac{27}{55}$$

ΛΥΣΗ 2ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$f_6=\sum_{i=1}^{5} f_i=1$, $F_5=1$. Έστω Ν το πλήθος των μαθητών

$F_2=\frac{N_2}{N}$, άρα $0,60=\frac{30}{N} \Leftrightarrow N=50$ άρα $\sum_{i=1}^{5} v_i=50$

και $N_5=50$
$F_3=F_2+f_3=0,60+0,10=0,70$
$v_3=v_4 \Leftrightarrow f_3=f_4$ άρα $f_4=0,10$
άρα $F_4=F_3+f_4=0,70+0,10=0,80$

$F_3=\frac{N_3}{N}$ άρα $0,70=\frac{N_3}{50} \Leftrightarrow N_3=35$

$F_4=\frac{N_4}{N}$ άρα $0,80=\frac{N_4}{50} \Leftrightarrow N_4=40$

$F_5=F_4+f_5$ άρα $1=0,80+f_5 \Leftrightarrow f_5=0,20$
$f_3=\frac{v_3}{N}$ άρα $0,10=\frac{v_3}{50} \Leftrightarrow v_3=5$ άρα και $v_4=5$

$N_5=N_4+v_5$ άρα $50=40+v_5 \Leftrightarrow v_5=10$

Γνωρίζουμε ότι το 40% των μαθητών έχει βάρος κάτω από 65 κιλά. Το 65 όμως είναι το κέντρο της δεύτερης κλάσης, άρα $f_1+\frac{f_2}{2}=0,40$ (1) ακόμη $f_1+f_2=F_2$

δηλαδή $f_1+f_2=0,60$ (2).
Από τις (1), (2) προκύπτει ότι $f_1=0,20$ και $f_2=0,40$.
Άρα $F_1=f_1=0,20$
$f_1=\frac{v_1}{N}$ άρα $v_1=10$ και $f_2=\frac{v_2}{N}$ άρα $v_2=10$ και $N_1=v_1=10$

Έστω c το πλάτος της κλάσης και $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ η i κλάση, τότε $x_1=65-c$, $x_2=65$, $x_3=65+c$, $x_4=65+2c$ και $x_5=65+3c$. Όμως $x_4=85$ άρα $85=65+2c \Leftrightarrow c=10$ άρα $x_1=55$, $x_2=65$, $x_3=75$, $x_4=85$, $x_5=95$ και επειδή $\alpha_i=x_i-\frac{c}{2}$ και

$\alpha_{i+1}=x_i+\frac{c}{2}$ άρα $\alpha_1=55-\frac{10}{2}=50$ και $\alpha_2=55+\frac{10}{2}=60$

Όμοια συμπληρώνουμε και τις υπόλοιπες κλάσεις.

	ΚΛΑΣΕΙΣ	xi	vi	fi	Ni	Fi
1	[50 , 60)	55	10	0,20	10	0,20
2	[60,70)	65	20	0,40	30	0,60
3	[70,80)	75	5	0,10	35	0,70
4	[80,90)	85	5	0,10	40	0,80
5	[90,100)	95	10	0,20	50	1
6	ΣΥΝΟΛΟ		50	1		

ΛΥΣΗ 3ου ΘΕΜΑΤΟΣ

$$P(A\cup B)=P(A)\cdot P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A)P(B)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)\cdot[1-P(B)]+[P(B)-P(A\cap B)]=0 \quad (1)$$

$P(A)\cdot(1-P(B))\geq 0$ (2) αφού $0\leq P(A)\leq 1$ και

$0\leq P(B)\leq 1$ ακόμη $A\cap B\subseteq B$ άρα $P(A\cap B)\leq P(B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)\geq 0$ (3) .

Από (1), λόγω των (2), (3) προκύπτει ότι
$P(A)\cdot[1-P(B)]=0$ (4) και

$P(B)-P(A\cap B)=0 \Leftrightarrow P(B)=P(A\cap B)$ (5)

Από (4) έχουμε P(A)=0 ή P(B)=1
- Αν P(A)=0 τότε $P(A\cup B)=0\cdot P(B)=0$ και επειδή $A\cap B\subseteq A$, άρα $P(A\cap B)\leq P(A)=0$, άρα και $P(A\cap B)=0$,

όποτε από (5) και P(B)=0.
- Αν P(B)=1, τότε $P(A\cap B)=P(B)=1$ και $P(A\cup B)=P(A)1$

όμως $B\subseteq A\cup B$, άρα και $P(B)\leq P(A\cup B)$, άρα και

$P(A\cup B)=1$, οπότε και P(A)=1

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ. ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον **ΠΕΙΡΑΙΑ**