ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

1ο ΘΕΜΑ: Έστω η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και η g με $g(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot f(x)$

i) εάν ισχύει $f'(x)-\frac{1}{x^2}\cdot f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$, για κάθε x>0 και η f παρουσιάζει στο $x_o=1$ τοπικό ακρότατο τότε να βρεθεί ο τύπος της f.

ii) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$

2ο ΘΕΜΑ: Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε x Ε $(0,+\infty)$ και οι μιγαδικοί με $z=\alpha^2+f(\alpha).i$, και $w=\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{f(\beta)}.i$ με ο<α<β για τους οποίους ισχύει ότι : $|z+\overline{w}|=|z-\overline{w}|$. Δείξτε ότι α) $Re(z.w)=0$, β) $\frac{f(\alpha)}{\alpha^2}=\frac{f(\beta)}{\beta^2}$,

γ) Υπάρχει ένας τουλάχιστον ξ Ε (α,β)τέτοιος ώστε $f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$

3ο ΘΕΜΑ: Η f είναι παραγωγήσιμη στο R και η f' είναι 1-1. Να δείξετε ότι η κάθε εφαπτομένη της C_f έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με την C_f

4ο ΘΕΜΑ: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln(e^x-1)$

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία

ii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f

iii) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης f(x)= 1

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

i) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=(e^{\frac{1}{x}}\cdot f(x))'=-\frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}.f(x)+e^{\frac{1}{x}}.f'(x)=$$

$$=e^{\frac{1}{x}}(f'(x)-\frac{1}{x^2}.f(x))=e^{\frac{1}{x}}.e^{-\frac{1}{x}}=e^0=1$$

άρα g'(x)=1 οπότε η g(x)=x+c ⇔

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot f(x)=x+c \Leftrightarrow f(x)=(x+c).e^{-\frac{1}{x}}$$

Προσδιορισμός σταθεράς c: Η f εμφανίζει στο $x_0=1>0$ τοπικό ακρότατο και επειδή είναι παραγωγίσιμη, άρα από Θ.fermat ισχύει f'(1)=0. Αντικαθιστώ στην σχέση

$f'(x)-\frac{1}{x^2}f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$ όπου x=1 και προκύπτει ότι $f(1)=-e^{-1}$

Άρα, $(1+c)e^{-1}=-e^{-1} \Leftrightarrow 1+c=-1 \Leftrightarrow c=-2$

Οπότε $f(x)=(x-2).e^{-\frac{1}{x}}$, x>0

ii) Η πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ θα είναι της μορφής y=λχ+β. Όπου

$$\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)e^{-\frac{1}{x}}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[(1-\frac{2}{x})e^{-\frac{1}{x}}]=(1-0).e^0=1$$

$$\beta=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-\lambda x]=\lim_{x\to+\infty}[(x-2)e^{-\frac{1}{x}}-x]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-2e^{-\frac{1}{x}}-x)=\lim_{x\to+\infty}[x(e^{-\frac{1}{x}}-1)-2e^{-\frac{1}{x}}]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}-2e^{-\frac{1}{x}}] \quad (1)$$

επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=(LH)=-1$ και $\lim_{x\to+\infty}2e^{-\frac{1}{x}}=2$

Οπότε το όριο των (1) ισούται με β=-1-2=-3. Άρα, η ασύμπτωτη είναι η y=1.x-3 ⇔ y=x-3

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

α) $|z+\overline{w}|=|z-\overline{w}| \Leftrightarrow |z+\overline{w}|^2=|z-\overline{w}|^2 \Leftrightarrow$

$(z+\overline{w}).(\overline{z}+w)=(z-\overline{w}).(\overline{z}-w) \Leftrightarrow$

$z.\overline{z}+z.w+\overline{w}.\overline{z}+\overline{w}.w=z.\overline{z}-z.w-\overline{w}.\overline{z}+\overline{w}.w \Leftrightarrow$

$2z.w+2\overline{w}.\overline{z}=0 \Leftrightarrow z.w+\overline{z}.\overline{w}=0 \Leftrightarrow 2Re(z.w)=0 \Leftrightarrow$

$Re(z.w)=0$

β) $z.w=(\alpha^2+f(\alpha)i).(\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{f(\beta)}i)=(\frac{\alpha^2}{\beta^2}-\frac{f(\alpha)}{f(\beta)})+(\frac{\alpha^2}{f(\beta)}+\frac{f(\alpha)}{\beta^2})i$

Όμως $Re(z.w)=0$ άρα

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{f(\alpha)}{f(\beta)} \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha^2}=\frac{f(\beta)}{\beta^2}$$

γ)Θεωρώ συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$ Η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Rolle στο [α, β] διότι είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β) με

$$g'(x)=\frac{f'(x).x^2-2x.f(x)}{x^4} \Leftrightarrow g'(x)=\frac{f'(x).x-2.f(x)}{x^3}$$ και

$$g(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha^2}=\frac{f(\beta)}{\beta^2}=g(\beta).$$

Άρα, υπάρχει ένα τουλάχιστον ξΕ (α, β) ώστε g'(ξ)= 0 ⇔ f'(ξ). ξ- 2. f(ξ)=0 ⇔

$$f'(\xi)=\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

Έστω (ε) μια τυχαία εφαπτόμενη της C_f στο $M(x_0, f(x_0))$, τότε ε: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Οι τετμημένες των σημείων τομής της (ε) και της C_f προκυπτούν από τις λύσεις της εξισώσης: $f(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ (1) η οποία έχει προφανή λύση την $x=x_0$. Έστω ότι η (1) έχει και δεύτερη λύση x_1 με $x_1\neq x_0$ τότε $f(x_1)=f'(x_0).(x_1-x_0)+f(x_0) \Leftrightarrow$

$$f'(x_0)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad (2)$$

Απο Θ.Μ.Τ. στο $[x_1, x_0]$ ή $[x_0, x_1]$ υπάρχει ξ Ε(x_1, x_0) ή (x_0, x_1) ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ Απο (2)προκύπτει ότι $f'(\xi)=f'(x_0) \Leftrightarrow$ $\xi=x_0$ (f': "1- 1") Άτοπο αφού ξ Ε(x_1, x_0) ή (x_0, x_1).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

ι) Θα πρέπει $e^x-1>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow e^x>e^0 \Leftrightarrow$ x>0. Άρα, $D_f=(0,+\infty)$

Ηf είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=1+\frac{1}{e^x-1}.(e^x-1)'=1+\frac{e^x}{e^x-1}>0$$

άρα η f είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$

ιι)Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα το σύνολο τιμών της f είναι $f(A)=(\lim_{x\to0^+}f(x), \lim_{x\to+\infty}f(x))$. Είναι

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+\ln(e^{-x}-1))=-\infty$ και

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln(e^{-x}-1))=+\infty$.

Οπότε $f(A)=(-\infty,+\infty)=R$

ιιι) Παρατηρώ ότι 0 Εf(A)άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,+\infty)$ και επειδή είναι γνήσια αύξουσα, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Τα θέματα επιμελήθηκαν τα φροντιστήρια

Γ.ΧΑΣΙΑΚΗΣ

στον ΠΕΙΡΑΙΑ