ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

1ο ΘΕΜΑ:

Α. Έστω $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ οι παρατηρητές μιας μεταβλητής Χ. Να αποδείξετε ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \bar{x}^2$$

Β. Οι ηλικίες t_i, $i=1,\ldots\nu$ των μαθητών μιας τάξης έχουν $CV_X=15\%$, ενώ πριν ένα χρόνο είχαν $CV_y=16\%$

ι) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική αποκλιση s

ιι) Μετά από πόσα χρόνια το δείγμα θα είναι ομοιογενές;

ιιι) Αν $\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 26176$ να δείξετε ότι $\nu=100$

2ο ΘΕΜΑ:

Α. Δίνονται Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε: Α, Β $\neq 0$ και Α,Β $\neq \Omega$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)\,x}{x^2 + (P(A)+P(B))x} = P(\Omega)$$

Β. Αν το $\Omega=\{0,1,2,3\}$ αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα και $f(x)= \lambda x^4 + \lambda^2 x^2 - 5$ με $\lambda \in \Omega$ να βρεθεί η πιθανότητα η γραφική παράσταση της f να έχει στο σημείο (1,f(1)) εφαπτομένη παράλληλη με τον άξονα xx'.

3ο ΘΕΜΑ:

Το 80% των οικογενειών μιας πόλης έχει παιδιά. Από τις οικογένειες με παιδιά, το 30% δεν έχει παιδί μεγαλύτερα ή ίσα των 7 ετών και το 50% δεν έχει παιδί μικρότερα των 7 ετών. Ποια είναι η πιθανότητα μια οικογένεια της πόλης να έχει και παιδί μικρότερο των 7 ετών και παιδί μεγαλύτερο ή ίσο των 7 ετών.

4ο ΘΕΜΑ:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)= 5x\ln x - \lambda x^2 - 5x$, $\lambda \in R$

Α) Να βρεθεί το λ ER ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο Α(1, f(1)), να έχει τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Β) Για την τιμή του λ που βρέθηκε στο (Α) ερώτημα

ι) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο με τον μέγιστο συντελεστή διεύθυνσης.

ιι) Να δειχθεί ότι όλες οι εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της f σχηματίζουν αμβλεία γωνία με τον x'x

ιιι) Να δειχθεί ότι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο Β(3/2, f(3/2)) είναι μικρότερη από τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο Γ(5/4, f(5/4))

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

Α) Ξέρουμε ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{\iota=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right)$$

κάνοντας πράξεις έχουμε:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{\iota=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu^2} \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \left(\frac{\sum_{\iota=1}^{\nu} t_i}{\nu}\right)^2 \Leftrightarrow s^2 = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \bar{x}^2 \quad (1)$$

Β) i) Αν $\bar{x}$ και s η μέση τική και η τυπική απόκλιση αντίστοιχα των ηλικιών των μαθητών και $\bar{y}$ και s'η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των ηλικιών των μαθητών πριν ένα χρόνο τότε:

$\bar{y} = \bar{x} - 1$ και s=s'. Επομένως : $CV_X = \frac{S}{\bar{x}} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}} = 0{,}15$ και

$CV_y = \frac{S'}{\bar{y}} \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}-1} = 0{,}1$. Με διαίρεση κατά μέλη έχουμε:

$$\frac{\bar{x}-1}{\bar{x}} = \frac{15}{16} \Leftrightarrow 16(\bar{x}-1) = 15\bar{x} \Leftrightarrow \bar{x} = 16 \text{ αρα } S = 2{,}4$$

ιι) Αν υποθέσουμε ότι μετά από c χρόνια το δείγμα θα είναι ομοιογενές τότε η νέα μέση τιμή θα είναι $\bar{x}+c$ και η τυπική απόκλιση θα παραμείνει ίδια δηλαδή s.

Θέλουμε $CV \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}+c} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{2{,}4}{16+c} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 2{,}4 \leq 1{,}6 + 0{,}1c \Leftrightarrow$

$c \geq 8$ Επομένως μετά από 8 χρόνια το δείγμα θα γίνει ομοιογενές.

ιιι) Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) για $\bar{x}=16$ και s= 2,4 έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow S^2 = \frac{1}{\nu}\cdot 26176 - 16^2 \Leftrightarrow 5{,}76 = \frac{26176}{\nu} - 256 \Leftrightarrow 261{,}76 = \frac{26176}{\nu} \Leftrightarrow$$

$\nu = 100$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

Α)

$$\lim_{x\to 0}\frac{P(A\cup B)\,x + P(A\cap B)\,x}{x^2 + (P(A)+P(B))x} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot[P(A\cup B)+P(A\cap B)]}{x\cdot[x+P(A)+P(B)]} =$$

$$= \frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{0+P(A)+P(B)} = \frac{P(A)+P(B)+P(A\cap B)-P(A\cap B)}{(P(A)+P(B))} =$$

$$= \frac{P(A)+P(B)}{P(A)+P(B)} = 1 = P(\Omega)$$

Β) Για να έχει η γραφική παράσταση της f στο σημείο (1,f(1)) εφαπτομένη παράλληλη στο xx' θα πρέπει: $f'(1)=0$

άρα $f'(x)= 4\lambda x^3 + 2\lambda^2 x$ άρα $f'(1)= 4\lambda + 2\lambda^2$

$f'(1)= 0 \Leftrightarrow 4\lambda + 2\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda(2+\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=-2$ αφού $\lambda \in \Omega$ τότε η λύση $\lambda=-2$ απορρίπτεται άρα πρέπει $\lambda=0$. Η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: "Η τιμή του λ να είναι μηδέν" είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

Αν ήταν 100 οι οικογένειες της πόλης τότε οι 80 οικογένειες θα είχαν παιδιά

οι $80\cdot\frac{30}{100} = 24$ οικογένειες δεν θα είχαν παιδιά μεγαλύτερα ή ίσα των 7 ετών, άρα θα είχαν μόνο παιδιά μικρότερα των 7 ετών

οι $80\cdot\frac{50}{100} = 40$ οικογένειες δεν θα είχαν παιδιά μικρότερα των 7 ετών, άρα θα είχαν μόνο παιδιά μεγαλύτερα ή ίσα των 7 ετών οπότε οι 80-(24+40)=16 οικογένειες θα έχουν και παιδιά μικρότερα των 7 ετών και παιδιά μεγαλύτεραή ίσα των 7 ετών άρα στις 100 οικογένειες της πόλης 16 οικογένειες έχουν και παιδιά μικρότερα των 7 ετών και παιδιά μεγαλύτερα ή ίσα των 7 ετών.

Άρα η πιθανότητα μια οικογένεια της πόλης να έχει παιδιά και μικρότερα των 7 ετών και μεγαλύτερα ή ίσα των 7 ετών είναι 16/100= 0,16

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

$f(x)= 5x\ln x - \lambda x^2 - 5x$, $x \in (0, +\infty)$

Α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης ευθείας στη C_f στο M(x, f(x)) είναι $f'(x)= 5\ln x - 2\lambda x$, $x \in (0, +\infty)$

$f''(x) = 5\cdot\frac{1}{x} - 2\lambda$. Για να παρουσιάζει η f' (x) μέγιστο στο $x_0=1$

θα πρέπει $f''(1)=0 \Leftrightarrow 5-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=5/2$

Για την τιμή αυτή του λ έχουμε $f''(x) = \frac{5}{x} - 5 = \frac{5-5x}{x}$

X	0		1	
f''(x)		+	0	-
f'(x)		↗		↘

άρα $f'(1) \geq f'(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$, άρα το f'(1) είναι το μέγιστο της f'(x).

Β) λ= 5/2 άρα, $f(x)= 5x\ln x - \frac{5}{2}x^2 - 5x \Rightarrow f'(x)= 5\ln x - 5x$

i) $f'(1)= 5\ln 1 - 5 = -5$, $f(1)= 5\cdot 1\cdot \ln 1 - \frac{5}{2} - 5 = -\frac{15}{2}$. Έστω y= αx+ β η εξίσωση της εφαπτομένης στο Α(1, - 15/2)τότε α= f'(1)= -5 και

$-\frac{15}{2} = \alpha\cdot 1 + \beta$ αρα $-\frac{15}{2} = -5 + \beta \Leftrightarrow \beta = -\frac{5}{2}$. Άρα, $y= -5x - \frac{5}{2}$

ii) Απο το (Α) ερώτημα αποδείξαμε ότι $f'(x) \leq f'(1) \Leftrightarrow f'(x) \leq -5$ άρα $\varepsilon\varphi\omega \leq -5$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο Μ (x, f(x)), x>0 άρα $\omega \in (\pi/2, \pi)$ άρα ω αμβλεία.

iii) ω_1 η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Β(3/2, f(3/2))

ω_2 η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο Γ(5/4, f(5/4)).

$\varepsilon\varphi\omega_1 = f'(3/2)$ $\varepsilon\varphi\omega_2 = f'(5/4)$. Για $x \in (1, +\infty)$ η f' γνησίως φθίνουσα άρα $\frac{5}{4} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow f'(\frac{5}{4}) > f'(\frac{3}{2}) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega_2 > \varepsilon\varphi\omega_1$ κι επειδή $\omega_1, \omega_2 \in (\pi/2, \pi)$ και εφαπτομένη γνησίως αύξουσα άρα $\omega_2 > \omega_1$

$\varepsilon\varphi'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} > 0$

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ.ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ