ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας

Επιλεγμένα θέματα για τους υποψήφιους μαθητές της Γ΄ τάξης Ενιαίου Λυκείου.

1ο ΘΕΜΑ: Αν για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν: $P(A) > 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}4$
Α) Να εξετάσετε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα
Β) Αν $\rho \in R$ ρίζα της εξίσωσης $x^2 + 2P(A \cap B) \cdot x + P(A) \cdot P(B) = 0$ να δειχθεί ότι $0 > \rho \geq -0{,}4$

Γ) Να δειχθεί ότι $0{,}2 < P(A-B) \leq 0{,}6$

2ο ΘΕΜΑ: Το μήκος των ράβδων που κατασκευάζει μια βιομηχανία, ακολουθεί κανονική ή σχεδόν κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση 2 cm. Η πιθανότητα μια ράβδος να έχει μήκος μεγαλύτερο του 1 m είναι 0,025.
Α) Να βρεθεί το μέσο μήκος των ράβδων και ο συντελεστής μεταβλητότητας
Β) Αν η πιθανότητα μια ράβδος να έχει μήκος μεγαλύτερο των 97cm είναι 0,3085, να βρεθεί η πιθανότητα το μήκος μιας ράβδου να είναι μεγαλύτερο των 95 cm και μικρότερο των 98cm.

3ο ΘΕΜΑ: Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις φ, f, g με $f(1) = f'(1) = 1$ και $\varphi(x) = f(g(x))$ με $g(x) = \ln x + x$, $x > 0$.
α) Να δείξετε ότι: $g(1) = \varphi(1) = 1$ και $g'(1) = \varphi'(1) = 2$
β) Να εξετάσετε αν η g(x) έχει ακρότατα στο διάστημα $(0, +\infty)$
γ) Να υπολογιστεί η τιμή του ορίου:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(h+1) + (h+1) - g(1)}{h}$$

δ) (i) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ των γραφικών παραστάσεων των φ και f στα σημεία τους Α(1, φ(1)) και Β(1, f(1)) αντίστοιχα
(ii) Να υπολογιστεί η γωνία που σχηματίζει η ε_2 με τον άξονα xx΄.

4ο ΘΕΜΑ: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot s \cdot x^2 - 2\bar{x} \cdot x + 13$, $x \in R$ όπου $\bar{x}$ ο μέσος και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος μεγέθους ν (με $\bar{x} \neq 0$ k' $s \neq 0$). Αν η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο Α(1, f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2007 τότε:
(α) Να βρείτε την f΄(x)
(β) Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές
(γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο
(δ) Αν η συνάρτηση f έχει ελάχιστη τιμή ίση με 1 τότε:
(i) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του δείγματος
(ii) Ποιο είναι το ελάχιστο ποσό κατα το οποίο πρέπει να αυξηθεί η μέση τιμή ώστε το δείγμα να παρουσιάζει ομοιογένεια.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 1ο ΘΕΜΑ

Α) $P(A) > 0{,}6$ και $P(B) = 0{,}4$. Αν τα Α, Β ήταν ασυμβίβαστα θα ίσχυε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) > 0{,}6 + 0{,}4 = 1$ άτοπο αφού

$0 \leq P(A \cup B) \leq 1$

Β) $\rho \in R$ ρίζα της $x^2 + 2P(A \cap B) \cdot x + P(A) \cdot P(B) = 0$ (1)

$\Delta = [-2P(A \cap B)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot P(A) \cdot P(B) = 4[P(A \cap B)]^2 - 4P(A) \cdot P(B) =$

$= 4[[P(A \cap B)]^2 - P(A) \cdot P(B)]$ $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$ άρα

$$\left.\begin{matrix} P(A \cap B) \leq P(A) \\ P(A \cap B) \leq P(B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow [P(A \cap B)]^2 \leq P(A) \cdot P(B)$$

άρα $\Delta \leq 0$ και επειδή γνωρίζουμε ότι η (1) έχει ρίζα ρ, άρα

$\Delta = 0 \Leftrightarrow [P(A \cap B)]^2 = P(A) \cdot P(B)$ και

$$\rho = -\frac{2P(A \cap B)}{2 \cdot 1} = -P(A \cap B)$$

$0 < P(A \cap B) \leq 0{,}4 \Leftrightarrow 0 > -P(A \cap B) - 0{,}4$

Γ) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B') \leq P(B') = 0{,}6$

$0 < P(A \cap B) \leq 0{,}4 \Rightarrow 0 > -P(A \cap B) \geq -0{,}4$

$0{,}6 = P(B') \geq P(A \cap B') = P(A-B) = P(A)P(A \cap B) > 0{,}6 - 0{,}4 = 0{,}2$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 2ο ΘΕΜΑ

Α) Γνωρίζουμε ότι στην κανονική ή σχεδόν κανονική κατανομή ισχύει ότι:
Στο $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ περιέχεται περίπου το 68% των παρατηρήσεων
Στο $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ περιέχεται περίπου το 95% των παρατηρήσεων
Στο $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$ περιέχεται περίπου το 99,7% των παρατηρήσεων. ΄Αρα, εκτός του διαστήματος $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$ περιέχεται το 100% - 95% = 5% των παρατηρήσεων και λόγω συμμετρίας το $\frac{5\%}{2} = 2{,}5\%$ θα είναι μεγαλύτερες του $\bar{x} + 2s$ άρα $\bar{x} + 2s = 100$ cm

$\bar{x} + 2 \cdot 2 = 100$ cm και $\bar{x} = 96$ cm

Β) Αφού η πιθανότητα μια ράβδος να είναι μεγαλύτερη απο 97cm είναι 0,3085, η πιθανότητα μια ράβδος να είναι μικρότερη απο 95 cm είναι πάλι 0,3085 (λόγω συμμετρίας της κατανομής). Άρα, η πιθανότητα το μήκος μιας ράβδου να ανήκει στο διάστημα (95, 96) είναι 0,50 - 0,3085 = 0,1915.
Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα το μήκος μιας ράβδου να ανήκει στο διάστημα (96, 98) = $(\bar{x}, \bar{x}+s)$ είναι $\frac{0{,}68}{2} = 0{,}34$

άρα η πιθανότητα το μήκος της ράβδου να ανήκει στο (95, 98) είναι 0,1915 + 0,34 = 0,5315.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 3ο ΘΕΜΑ

α) $g(1) = \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1$

$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ άρα $g'(1) = \frac{1}{1} + 1 = 2$
$\varphi(1) = f(g(1)) = f(1) = 1$ άρα $g(1) = \varphi(1) = 1$
$\varphi'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ οπότε $\varphi'(1) = f'(g(1)) \cdot g'(1) \Leftrightarrow$
$\varphi'(1) = f'(1) \cdot g'(1) \Leftrightarrow \varphi'(1) = 1 \cdot g'(1) \Leftrightarrow \varphi'(1) = g'(1)$ άρα
$\varphi'(1) = g(1)$ άρα $\varphi'(1) = g'(1) = 2$

(β) $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$ δηλαδή $g'(x) > 0$ για $x > 0$ άρα η g είναι γνησίως

αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$ επομένως δεν έχει ακρότατα.

(γ) $$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(h+1) - (h+1) - g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{g(h+1) - g(1)}{h} = g'(1) = 2$$

(δ) (i) για την (ε_1) έχουμε: $\varphi(1) = 1$ και $\varphi'(1) = 2$ άρα
Αν (ε_1): $y = \lambda x + \beta$ τότε $\lambda = \varphi'(1) = 2$ οπότε (ε_1): $y = 2x + \beta$ όμως το Α(1, φ(1)) ανήκει στην (ε_1) άρα: $\varphi(1) = 2 + \beta \Leftrightarrow 1 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$. Επομένως: (ε_1): $y = 2x - 1$ για την ε_2 έχουμε: $f(1) = f'(1) = 1$.
Αν ε_2: $y = \lambda x + \beta$ τότε $\lambda = f'(1) = 1$ οπότε (ε_2): $y = x + \beta$ όμως το Β(1, f(1)) ανήκει στην (ε_2) άρα: $f(1) = 1 + \beta \Leftrightarrow 1 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$. Επομένως (ε_2): $y = x$
(ii) Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η (ε_2) με τον xx΄ τότε
$\lambda = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow 1 = \varepsilon\varphi\omega \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΣΤΟ 4ο ΘΕΜΑ

(α) $f(x) = (4sx^2 - 2\bar{x} \cdot x + 13)' = 8 \cdot s \cdot x - 2 \cdot \bar{x}$
(β) Η εφαπτομένη στο σημείο Α(1, f(1)) είναι παράλληλη στην ευθεία y = 2007 άρα: $f'(1) = 0$ δηλαδή

$8s - 2\bar{x} = 0 \Leftrightarrow 4s - \bar{x} = 0 \Leftrightarrow 4s = \bar{x}$ (1) $\Leftrightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow CV = 0{,}25 = 25\%$. Επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές
(γ) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 8s \cdot x - 2\bar{x} \geq 0 \Leftrightarrow 4s \cdot x - \bar{x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{\bar{x}}{4s} \Leftrightarrow$ απο (1) $x \geq \frac{4s}{4s} \Leftrightarrow x \geq 1$

άρα για x = 1 η f παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με $f(1) = 4s - 2\bar{x} + 13$ (2)

(δ)(i) Η ελάχιστη τιμή της f είναι ίση με 1 άρα: $f(1) = 1 \Leftrightarrow$ απο (2)

$4s - 2\bar{x} + 13 = 1 \Leftrightarrow 4s - 2\bar{x} = -12 \Leftrightarrow$ απο (1) $4s - 8s = -12 \Leftrightarrow -4s = -12 \Leftrightarrow$

$s = 3$ και $\bar{x} = 12$
(ii) Θέλουμε

$$CV \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{S}{\bar{x}+c} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{3}{12+c} \leq 0{,}1 \Leftrightarrow 3 \leq 1{,}2 + 0{,}1c \Leftrightarrow 1{,}8 \leq 0{,}1c \Leftrightarrow c \geq 18$$

άρα το ελάχιστο ποσό είναι c = 18.

ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΠΙΜΕΛΗΘΗΚΑΝ ΤΑ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ

Γ.ΧΑΣΙΑΚΗΣ
στον ΠΕΙΡΑΙΑ