ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΕΠΑΛ Α΄ΟΜΑΔΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1) Σχολ. Βιβλίο – σελ. 138 – Ορισμός 2

Α2) **α)** **Σ** **β)** **Λ** **γ)** **Λ** **δ)** **Λ** **ε)** **Σ**

Α3) **α)** $(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$

β) $\int_{\alpha}^{\beta}\sigma\upsilon\nu x dx=[\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta}=\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha$

γ) $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\ell|$

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Έχουμε $x\cdot f(x)-2f(x)=x^2-4$

$(x-2)f(x)=x^2-4$

για $x\neq 2$, $\frac{(x-2)\cdot f(x)}{(x-2)}=\frac{x^2-4}{x-2}$

$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ για $x\neq 2$

Β2.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{4-4}{0}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Β3.

Η $f:R\to R$ είναι συνεχής σε όλο το R, άρα θα είναι συνεχής και στο $x_0=2$

Θα ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)\Leftrightarrow 4=f(2)\Leftrightarrow \boxed{f(2)=4}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Α/Α	Ηλικίες Υπαλλήλων	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων ν_i	Κέντρο κλάσης x_i	$x_i\nu_i$	Σχετική συχνότητα $f_i\%$
1η κλάση	$[25,35)$	100	30	3000	50
2η κλάση	$[35,45)$	50	40	2000	25
3η κλάση	$[45,55)$	40	50	2000	20
4η κλάση	$[55,65)$	10	60	600	5
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu=200$		7600	100

$$x_1=\frac{25+35}{2}=\frac{60}{2}=30$$
$$x_2=\frac{35+45}{2}=\frac{80}{2}=40$$
$$x_3=\frac{45+55}{2}=\frac{100}{2}=50$$
$$x_4=\frac{55+65}{2}=\frac{120}{2}=60$$

$$x_1\nu_1=30\cdot100=3000$$
$$x_2\nu_2=40\cdot50=2000$$
$$x_3\nu_3=50\cdot40=2000$$
$$x_4\nu_4=60\cdot10=600$$

$$f_1\%=\frac{\nu_1}{\nu}\cdot100\%=\frac{100}{200}\cdot100\%=50\%$$
$$f_2\%=\frac{\nu_2}{\nu}\cdot100\%=\frac{50}{200}\cdot100\%=25\%$$
$$f_3\%=\frac{\nu_3}{\nu}\cdot100\%=\frac{40}{200}\cdot100\%=20\%$$
$$f_4\%=\frac{\nu_4}{\nu}\cdot100\%=\frac{10}{200}\cdot100\%=5\%$$

Γ2.

$$\overline{x}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+....+x_i\nu_i}{\nu}=\frac{x_1\nu_1+x_2\nu_2+x_3\nu_3+x_4\nu_4}{\nu}=\frac{3000+2000+2000+600}{200}=\frac{76000}{200}=38$$

Γ3.

Το 25% των υπαλλήλων έχουν ηλικία τουλάχιστον 45 ετών

Γ4.

Από την 4η κλάση αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι, άρα η καινούρια συχνότητα της 4ης κλάσης θα είναι $\nu_4' = \nu_4 - 5 = 10 - 5 \Rightarrow \nu_4' = 5$

Από την 2η κλάση αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι, άρα η καινούρια συχνότητα της 2ης κλάσης θα είναι $\nu_2' = \nu_2 - 5 = 50 - 5 \Rightarrow \nu_2' = 45$

Στην 1η κλάση προσλαμβάνονται δέκα (10) υπάλληλοι, άρα η καινούρια συχνότητα της 1ης κλάσης θα είναι $\nu_1' = \nu_1 + 10 = 100 + 10 \Rightarrow \nu_1' = 110$

Έχουμε τον πίνακα συχνοτήτων

Α/Α	**Ηλικίες Υπαλλήλων**	x_i	ν_i'	$x_i \nu_i'$
1η κλάση	$[25,35)$	30	110	3300
2η κλάση	$[35,45)$	40	45	1800
3η κλάση	$[45,55)$	50	40	2000
4η κλάση	$[55,65)$	60	5	300
ΣΥΝΟΛΑ			$\nu = 200$	7400

$$\nu' = \nu_1' + \nu_2' + \nu_3' + \nu_4' = 110 + 45 + 40 + 5 = 200$$

$$\bar{x}' = \frac{x_1\nu_1' + x_2\nu_2' + x_3\nu_3' + x_4\nu_4'}{\nu'} = \frac{3300 + 1800 + 2000 + 300}{200} = \frac{74000}{200} = 37$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1.

$$f(x) = e^x \cdot (x-1)$$

$$f'(x) = \left(e^x\right)' \cdot (x-1) + e^x . (x-1)'$$

$$f'(x) = e^x (x-1) + e^x \cdot 1$$

$$f'(x) = x \cdot e^x - e^x + e^x$$

$$f'(x) = x \cdot e^x$$

Πρέπει να αποδείξουμε : $f'(x) = f(x) + e^x$

$$x \cdot e^x = e^x (x-1) + e^x$$

$$x \cdot e^x = x \cdot e^x - e^x + e^x$$

$x \cdot e^x = x \cdot e^x$ Ισχύει

Δ2.

$f'(x)=0 \Rightarrow x\cdot e^x=0 \Rightarrow x=0$

	$-\infty$	0	$+\infty$
x	$-$	0	$+$
e^x	$+$		$+$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Στο διάστημα $(-\infty,0]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, στο διάστημα $[0,+\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $x_0=0$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο (ολικό ελάχιστο) το $f(0)=-1$

Δ3.

$g(x)=f(x)+e^x$

$g(x)=e^x\cdot(x-1)+e^x$

$g(x)=x\cdot e^x-e^x+e^x$

$g(x)=x\cdot e^x$

$g(x)=f'(x)$

Το εμβαδόν του χωρίου θα δίνεται από το ολοκλήρωμα :

$$E=\int_{-1}^{1}|g(x)|dx=\int_{-1}^{1}|f'(x)|dx=-\int_{-1}^{0}f'(x)dx+\int_{0}^{1}f'(x)dx=-\left[f(x)\right]_{-1}^{0}+\left[f(x)\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\left(f(0)-f(-1)\right)+f(1)-f(0)=-f(0)+f(-1)+f(1)-f(0)=-2f(0)+f(-1)+f(1)=$$

$$=-2\cdot(-1)+e^{-1}(-1-1)+e^{1}(1-1)=2+e^{-1}\cdot(-2)+e\cdot 0=2-2\cdot\frac{1}{e}\Leftrightarrow \boxed{E=\frac{2e-2}{e}}$$